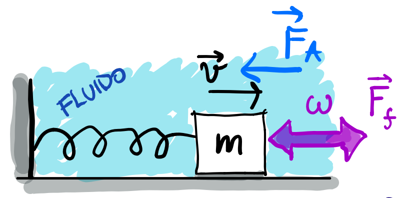
Oscillatore smorzato e forzato

Si considera ora l'applicazione di una forza oscillante al sistema massa-molla in esame.

In sostanza si aggiunge, come schematizzato, una nuova forza alla massa nella stessa direzione del moto oscillatorio con ampiezza F_0, pulsazione ω e, arbitrariamente, fase iniziale tale da poter scrivere in modulo



$$F_f = F_0 \cos \omega t$$

L'equazione di moto diventa allora

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

ovvero

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \tilde{F}_0 \cos \omega t}\ , \quad \gamma = b/2m\ , \ \omega_0 = \sqrt{k/m}\ , \ \tilde{F}_0 = F_0/m$$

Si tratta di un'equazione differenziale al II ordine, di I grado, a coefficienti costanti ma ora NON omogenea per causa della forza esterna periodica (detta anche sollecitazione «forzante»).

La sua soluzione si ottiene sommando la soluzione generale della parte omogenea, cioè l'oscillatore smorzato non forzato, con una soluzione particolare dell'equazione complessiva.

Si può immaginare che, dopo un tempo di smorzamento tipico ($t \sim 1/\gamma$), l'oscillazione proceda in accordo con la pulsazione impressa dalla forza esterna, per cui si «prova» come soluzione particolare la forma armonica

$$x_F(t) = A \,\mathrm{sen}\,(\omega t - \delta)$$

e quindi come soluzione generale la sovrapposizione

$$\boxed{x(t) = A_s e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t + \phi_s) + A \sin(\omega t - \delta)}$$

Bisogna ovviamente determinare i termini A, δ.

Per stabilire la dipendenza dei parametri A, δ (ampiezza e fase iniziale della parte « forzata » del moto) è sufficiente sostituire l'espressione $x_F(t)$ nell'equazione del moto: per tempi sufficientemente lunghi la parte smorzata è abbattuta dall'esponenziale e non modifica quindi i risultati.

A partire quindi dalle

$$x_F = A \sin(\omega t - \delta)$$
$$\dot{x}_F = \omega A \cos(\omega t - \delta)$$
$$\ddot{x}_F = -\omega^2 A \sin(\omega t - \delta)$$

si ha

$$-\omega^2 A \sin(\omega t - \delta) + 2\gamma\omega A \cos(\omega t - \delta) + \omega_0^2 A \sin(\omega t - \delta) = \tilde{F}_0 \cos\omega t$$

ovvero, sviluppando e raccogliendo:

$$\sin\omega t \left[-\omega^2 A \cos\delta + 2\gamma\omega A \sin\delta + \omega_0^2 A \cos\delta\right) +$$
$$\cos\omega t \left[+\omega^2 A \sin\delta + 2\gamma\omega A \cos\delta - \omega_0^2 A \sin\delta - \tilde{F}_0\right) = 0$$

$$\begin{cases} \text{dalla prima: } (\omega_0^2 - \omega^2)\cdot\cos\delta + 2\gamma\omega \sin\delta = 0 \\ \text{dalla seconda: } 2\gamma\omega \cdot \cos\delta + (\omega^2 - \omega_0^2)\sin\delta = \tilde{F}_0 / A \end{cases}$$

dalla prima: $\quad \operatorname{tg}\delta = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega}$

quadrando e sommando le due equazioni:

$$\begin{array}{ll} & (\omega^2-\omega_0^2)^2\cos^2\delta + 4\gamma^2\omega^2\sin^2\delta + 4\gamma\omega(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta\cos\delta = 0 \\ & (\omega^2-\omega_0^2)^2\sin^2\delta + 4\gamma^2\omega^2\cos^2\delta + 4\gamma\omega(\omega^2-\omega_0^2)\sin\delta\cos\delta = \left(\frac{\tilde{F}_0}{A}\right)^2 \\ \hline \oplus & (\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 = \tilde{F}_0^2 / A^2 \end{array}$$

in definitiva le grandezze cercate si scrivono

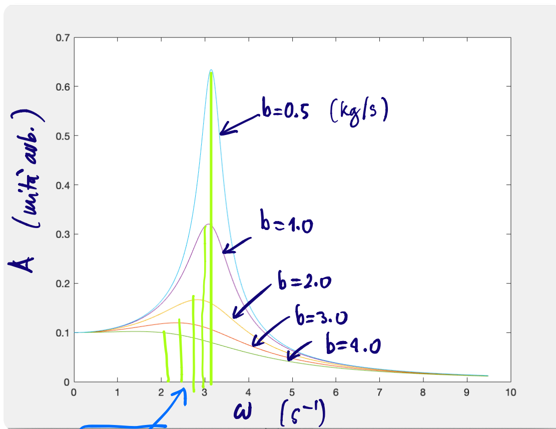
$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta &= \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\gamma\omega} \\ A &= \frac{\tilde{F}_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \end{aligned}}$$

Studio degli andamenti δ, A in funzione di ω (frequenza forzata).

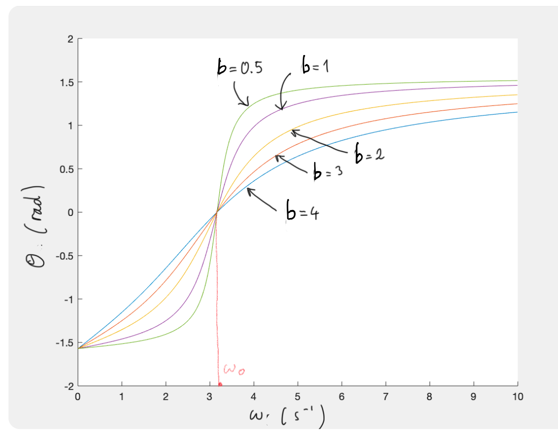
$\gamma = b/2m$ $\quad \tilde{F}_0 = F_0/m$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Grafici effettuati per $m = 1\,kg$, $k = 10\,N/m \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{10}\ s^{-1} \simeq 3.16\ s^{-1}$



$\omega_{F,max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$



La funzione A ha un massimo in corrispondenza del valore minimo del denominatore (al quadrato) $(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2$ ovvero per

$$2(\omega^2 - \omega_0^2)\cdot 2\omega + 8\omega\gamma^2 = 0 \iff (\omega^2 - \omega_0^2) + 2\gamma^2 = 0 \iff \omega_{MAX} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Ponendoci come nel caso dell'oscillatore smorzato nelle condizioni di piccoli attriti ($\gamma << \omega_0$) si ottiene quindi che sia la pulsazione smorzata ω_s che la pulsazione di massima ampiezza forzata sono vicine a ω_0:

$$\omega_s \approx \omega_0 \quad , \quad \omega_{MAX} \approx \omega_0 \qquad [\,\omega_0 \gg \gamma\,]$$

La fase forzata δ è invece sempre nulla in corrispondenza di $\omega = \omega_0$ per cui, essendo

$$F_f = F_0 \cos \omega t \quad , \quad x_F = A \sin(\omega t - \delta)$$

questo implica che, per $\omega = \omega_0$, l'oscillazione forzata x_F è sfasata di $\pi/2$ rispetto la sollecitazione armonica esterna.

La condizione per la quale questo si realizza ($\omega \approx \omega_0$) è detta **RISONANZA** nel sistema oscillante forzato / smorzato

È importante anche lo studio del moto dell'oscillatore forzato-smorzato in condizioni di non-risonanza, ovvero per $\omega \neq \omega_0$ (o ω_s se γ non è trascurabile); si considerano i due casi $\omega > \omega_0$ e $\omega < \omega_0$.

Tornando a utilizzare le $\quad tg\,\delta = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega} \qquad A = \dfrac{\tilde{F}_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$

si ha che

per $\omega > \omega_0$ $\quad tg\,\delta \approx \dfrac{\omega}{2\gamma} \to \infty \quad (\gamma \neq 0) \Rightarrow \delta \to \pi/2$

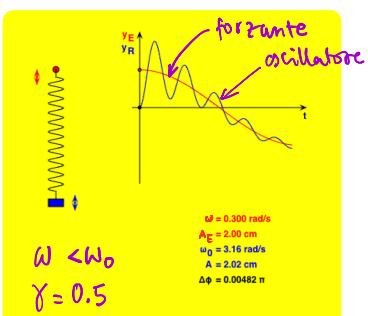
$$A \approx \frac{F_0}{m\omega^2} \to 0 \Rightarrow x \to -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t = -\frac{F_f}{m\omega^2}$$

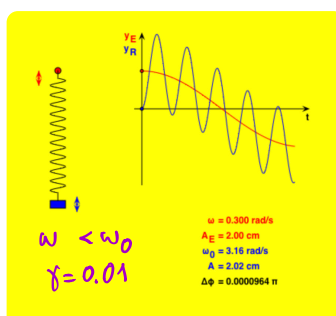
per cui per alte frequenze forzanti il moto è in controfase con la sollecitazione e di ampiezza tendente a zero;

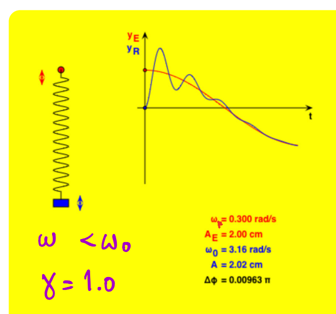
per $\omega < \omega_0$ $\quad tg\,\delta \approx -\dfrac{\omega_0^2}{2\gamma\omega} \to -\infty \quad \Rightarrow \delta = -\pi/2$

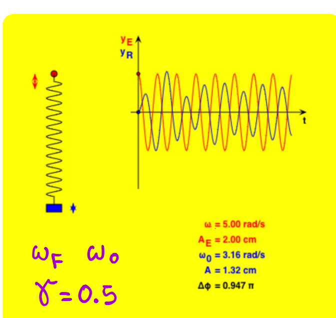
$$A \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad \Rightarrow x \to \frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos\omega t = +\frac{F_f}{m\omega_0^2}$$

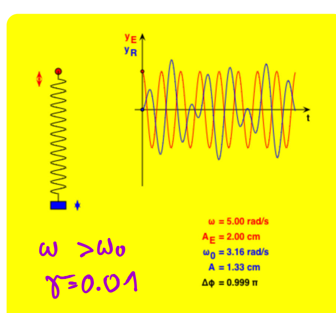
per cui per basse frequenze forzanti il moto è in fase con la sollecitazione e di ampiezza tendente a quella fissata dalla forzante.

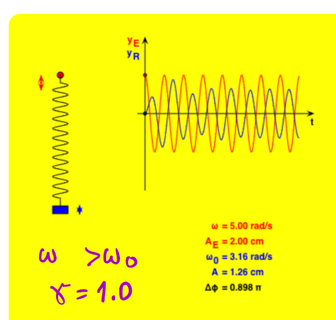












Oscillatori risonanti

Si osserva negli andamenti di A, δ sopra riportati che una sollecitazione con pulsazione ben differente da quella propria (naturale) del sistema libero/debolmente smorzato, $\omega_0 \simeq \omega_s$, quest'ultimo «risponde» molto poco a detta sollecitazione. Al contrario, la risposta è tanto più pronunciata (sempre dopo il transitorio di smorzamento naturale che dura $\sim 1/\gamma$) quanto più ω si avvicina a ω_0.
In corrispondenza di questa situazione risonante si osserva, come già ricavato, che $\delta = 0$ per cui l'oscillazione del sistema, con ampiezza relativamente grande, è sfasata di $\pi/2$ rispetto la fase della forza esterna.

Questo sfasamento fa sì che la forza esterna e la velocità della massa oscillante siano in fase per cui si ottiene massimo scambio di potenza meccanica: da un punto di vista energetico, quindi, la risonanza equivale a un continuo trasferimento di energia dalla forza applicata al sistema che continuamente dissipa questa stessa energia.

Il calcolo esplicito prevede di effettuare il prodotto che esprime la potenza istantanea

$$\mathcal{P}(t) = F_f(t) \cdot v(t) = F_0 \cos \omega t \cdot \left[\dot{x}(t) \right]$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left[A_s e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t + \phi_s) + A \sin(\omega t - \delta) \right].$$

Limitandosi al caso dopo lo smorzamento iniziale ($t \gtrsim 1/\gamma$) si ha che

$$v(t) \simeq \omega A \cos(\omega t - \delta) \Rightarrow \mathcal{P}(t) = \omega A F_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \delta) =$$
$$= \omega A F_0 \left[\cos^2 \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \omega t \sin \delta \right]$$

che è una funzione relativamente complicata del tempo. Ne calcoliamo il valore medio secondo la definizione:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t)\, dt$$

Dunque

$$\langle P \rangle = \omega A F_0 \left[\cos\delta \, \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t \, dt}_{1/2} + \frac{1}{T}\sin\delta \underbrace{\int_0^T \sin\omega t \cos\omega t \, dt}_{0} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2}\,\omega A F_0 \cos\delta \, .$$

Si procede sapendo che $A = \tilde{F}_0 / \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$ e che

$\tan\delta = (\omega^2-\omega_0^2)/2\gamma\omega \Rightarrow \cos\delta = (1+\tan^2\delta)^{-1/2} = \dfrac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$

per cui

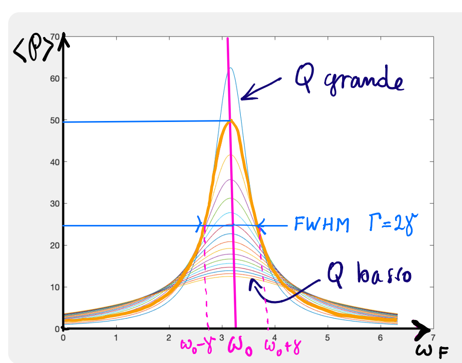
$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{4m\gamma} \, \frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}$$

che, per valori di piccolo smorzamento ($\gamma \ll \omega_0$), è una curva che assume valori relativamente grandi per $\omega \approx \omega_0$ ovvero, in corrispondenza, essendo

$(\omega_0^2-\omega^2)^2 \approx (\omega_0-\omega)^2 \cdot 4\omega_0^2$

$$\langle P \rangle \approx \frac{F_0^2}{4m\gamma} \, \frac{\gamma^2}{(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2}$$

che è una curva caratteristica detta di Lorentz o lorentziana.



Di questa curva è consuetudine calcolare la larghezza a metà altezza (Full Width Half Maximum, FWHM): si ottiene subito imponendo che $\langle P \rangle$ sia ridotta alla metà del suo massimo che

$$\Gamma = 2\gamma = 1/\tau$$

Siccome $\langle P \rangle (\omega = \omega_0) = F_0^2 / 4m\gamma$ vale anche $\langle P \rangle_{MAX} \cdot \Gamma = \text{cost}$, ovvero il picco è tanto più stretto (« selettivo ») quanto più è alto e viceversa.

Si introduce il FATTORE di MERITO della RISONANZA Q

$Q = \dfrac{\omega_0}{\Gamma} = \dfrac{2\pi}{T} \cdot \tau = \dfrac{\tau}{T} 2\pi$: un risonatore è « selettivo » quando ha un Q elevato (con piccoli effetti dissipativi).

[NB: $\tau = 1/2\gamma$ è il tempo di smorzamento dell'oscillatore] .

Un esempio « sperimentale » semplice di oscillatore smorzato - forzato

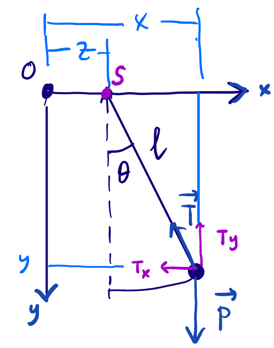
Si considera un pendolo ideale (massa m, lunghezza ℓ) con punto di sospensione sollecitato orizzontalmente da un oscillazione armonica semplice forzante

La mano impartisce il moto forzato

$$z = z_0 \cos \omega t$$

al punto di sospensione S

Si considerano piccole ampiezze angolari del pendolo, tali che valga $\sin\theta \approx \theta$.



In questa approssimazione $T \approx T_y = P = mg$ e l'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = -T \operatorname{sen}\theta - b\dot{x} \qquad [\text{altrito viscoso: } b]$$

quindi

$$m\ddot{x} \simeq -mg \cdot \frac{(x-z)}{\ell} - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 (x - z) - 2\gamma\dot{x} \qquad \left[\omega_0 = \sqrt{g/\ell}\ ,\ \gamma = \frac{b}{2m}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_0 \cos \omega t}$$

che è esattamente del tipo smorzato / forzato già studiato, con l'unica differenza che, al posto di $\tilde{F}_0 = F_0/m$, ora c'è $\omega_0^2 z_0$:

la soluzione è

$$\boxed{\begin{gathered} x = A \sin(\omega t - \delta) \\ \text{con} \quad A = \frac{\omega_0^2 z_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega} \end{gathered}}$$

Notare che in questo esempio $A(\omega = 0) = z_0$.