Soluzione esercizio I.1

a) Si può determinare la velocità della caramella in funzione di ϕ dalla conservazione dell'energia. Scegliamo di porre l'arbitrario zero dell'energia potenziale gravitazionale alla quota di B. Uguagliando l'energia iniziale, puramente potenziale, alla somma di energia cinetica e potenziale per un generico ϕ otteniamo

$$mgh = -mgR\sin\phi + \frac{1}{2}mv(\phi)^2, \tag{1}$$

da cui

$$v(\phi) = \sqrt{2g(h + R\sin\phi)}. \tag{2}$$

Nel tratto semicircolare BC la caramella compie istantaneamente un moto circolare con accelerazione centripeta $a_c(\phi) = v(\phi)^2/R$, quindi l'equazione del moto proiettata sulla direzione radiale con verso positivo entrante è

$$m\frac{v(\phi)^2}{R} = F_N(\phi) - mg\sin(\phi), \tag{3}$$

da cui la reazione vincolare risulta

$$\boxed{F_N(\phi) = mg\left(2\frac{h}{R} + 3\sin\phi\right)} \tag{4}$$

b) B e C sono alla stessa quota quindi le velocità della caramella saranno uguali nei due punti, e la situazione è analoga a quella del rimbalzo di una pallina su un piano orizzontale con una dissipazione parziale di energia cinetica tale da dimezzare la velocità ad ogni rimbalzo. Dopo un rimbalzo la quota massima sarà quindi un quarto di quella iniziale. Ad ogni ulteriore rimbalzo la velocità si riduce di un fattore 2 rispetto alla precedente e la quota si riduce di un fattore 2^2. Dopo l'N-esimo urto, la velocità sarà collegata alla quota massima $z_{max}^{(N)}$ dalla conservazione dell'energia

$$v_C^{(N)} = \sqrt{2gz_{max}^{(N)}}. \tag{5}$$

Dato che l'energia viene dimezzata ad ogni urto avremo anche

$$v_C^{(N)} = \frac{v_C^{(N-1)}}{2} = \frac{v_C^{(0)}}{2^N} = \frac{\sqrt{2gh}}{2^N}. \tag{6}$$

Quindi la quota massima raggiunta dopo l'N-esimo urto sarà

$$\boxed{z_{max}^{(N)} = \frac{1}{2g}\left(v_C^{(N)}\right)^2 = \frac{h}{2^{2N}}} \tag{7}$$

L'energia meccanica dopo N urti sarà quindi

$$E^{(N)} = \frac{mgh}{2^{2N}}, \tag{8}$$

e nel tratto curvo l'energia potenziale sarà, come prima e indipendentemente dal numero di urti,

$$E_{pot}(\phi) = -mgR\sin\phi. \tag{9}$$

Una rappresentazione di queste due quantità in funzione di ϕ è riportata in Figura 1.

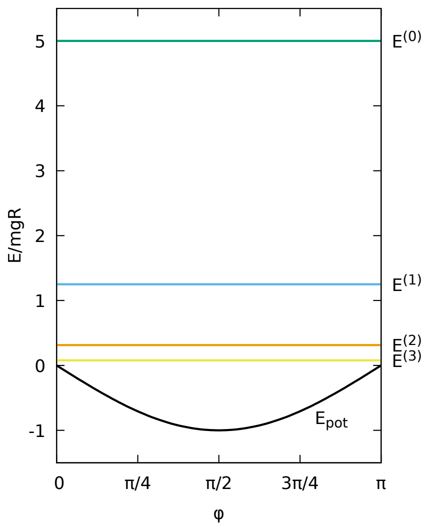

Figura 1: Energia potenziale in funzione di ϕ ed energia meccanica iniziale e dopo 1, 2 e 3 urti.

c) La forza inerziale dovuta all'accelerazione darà ora una forza normale alla superficie del tubo non nulla, e quindi sulla caramella agirà una forza con componente verticale $F_z = \mu m|a_T|$. L'equazione del moto lungo z sarà quindi

$$m\ddot{z} = -mg + \mu m|a_T| = -m(g - \mu|a_T|). \tag{10}$$

L'equazione del moto è quindi analoga a quella di una caduta libera ma con una accelerazione gravitazionale modificata. La velocità raggiunta al punto B sarà quindi

$$\boxed{\widetilde{v}_B = \sqrt{2(g-\mu|a_T|)h} \simeq 2.72 \text{ m/s}} \tag{11}$$

Il lavoro compiuto dalla forza di attrito può essere calcolato dalla differenza tra le energie in A e in B

$$\boxed{W_{att} = E_B - E_A = \frac{1}{2}m\widetilde{v}_B^2 - mgh = -\mu m|a_T|h = -0.06 \text{ J}} \tag{12}$$

d) L'equazione del moto in direzione tangente alla semicirconferenza sarà

$$mR\ddot{\phi} = mg\cos\phi - ma_t\sin\phi. \tag{13}$$

L'angolo di equilibrio ϕ_{eq} sarà quello per cui $\ddot{\phi} = 0$, che risulta essere

$$\boxed{\phi_{eq} = \text{atan}\left(\frac{g}{a_T}\right) = \ 1.18 \text{ rad}} \tag{14}$$

Per estrarre il periodo delle piccole oscillazioni attorno a questo punto di equilibrio possiamo considerare il campo di gravità efficace dato da $g' = \sqrt{g^2 + a_T^2}$, pórci nel sistema di riferimento fisso con un asse inclinato di ϕ_{eq} rispetto al precedente e scrivere l'equazione del moto

$$mR\ddot{\theta} = -mg'\sin\theta \simeq -mg'\theta. \tag{15}$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a_T^2}}{R} \Longrightarrow \boxed{T = 2\pi\frac{\sqrt{R}}{\left(g^2 + a_T^2\right)^{1/4}} \simeq 0.61 \text{ s}} \tag{16}$$

e) La rotazione introduce una forza centrifuga da includere nell'equazione del moto per determinare l'angolo di equilibrio:

$$0 = mg\cos\phi_1 + m\Omega^2 R(1 - \cos\phi_1)\sin\phi_1, \tag{17}$$

da cui la velocità angolare in funzione dell'angolo di equilibrio

$$\boxed{\Omega = \sqrt{-\frac{g\cos\phi_1}{R(1 - \cos\phi_1)\sin\phi_1}} = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}} \simeq 7.58 \text{ rad/s} = 1.21 \text{ giri/s}} \tag{18}$$

Soluzione esercizio I.2

a) Considerando la struttura orizzontale, tutta la massa è distribuita nel piano orizzontale. Scelgo x come asse orizzontale. Per la geometria del sistema la posizione del centro di massa si trova sull'asse x

$$\boxed{x_{\text{CM}} = \frac{9Rm_2 - 9Rm_1}{m_1 + m_2 + M} = 7.6 \text{ cm}} \tag{19}$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O e parallelo ai dischi si può ottenere sfruttando il teorema di Steiner

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)R^2 + (m_1 + m_2)(9R)^2 + \frac{1}{12}ML^2 = 0.815 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} \tag{20}$$

b) Per avere equilibrio occorre che sia le forze esterne, sia i momenti delle forze esterne siano complessivamente nulli. Scrivendo la prima equazione cardinale è possibile determinare la reazione vincolare in O che sorregge la struttura. Scrivendo la seconda, invece, possiamo ricavare l'angolo di equilibrio.

Nel caso $l_0 = H$, le molle non fanno forza quando la struttura è orizzontale. Abbiamo quindi, scegliendo angoli e momenti torcenti positivi in senso orario,

$$\sum \tau_O = -k_2\theta(9R)^2 - 9Rm_2g - k_1\theta(9R)^2 + 9Rm_1g = 0, \tag{21}$$

da cui è possibile ricavare l'angolo

$$\boxed{\theta_{\text{eq1}} = -\frac{(m_2 - m_1)g}{9R(k_1 + k_2)} = -0.07085 \text{ rad} \simeq -4°} \tag{22}$$

c) Se il sistema viene perturbato dal suo stato di equilibrio inizierà ad oscillare. L'equazione del moto è data da

$$I_O\ddot{\theta} = -(k_2 + k_1)(9R)^2\theta - (m_2 - m_1)g(9R). \tag{23}$$

Riscrivendo l'equazione per le variazioni attorno all'equilibrio $\delta\theta = \theta - \theta_{eq}$ otteniamo

$$\ddot{\delta\theta} = -\frac{(k_2 + k_1)(9R)^2}{I_O}\delta\theta, \tag{24}$$

che è un'equazione armonica da cui possiamo estrarre la frequenza delle oscillazioni

$$\Omega = 9R\sqrt{\frac{k_2 + k_1}{I_O}} \implies \boxed{T = \frac{2\pi}{9R}\sqrt{\frac{I_O}{k_2 + k_1}} = 0.63 \text{ s}}. \tag{25}$$

La soluzione dell'equazione del moto sarà invece

$$\theta(t) = \theta_{\text{eq1}} + A\cos(\Omega t + \phi) \tag{26}$$

con A e ϕ costanti di integrazione. Usando le condizioni iniziali la legge oraria risulta

$$\boxed{\theta(t) = \theta_{\text{eq1}}(1 - \cos\Omega t)}. \tag{27}$$

d) Durante l'urto elastico si conservano il momento angolare rispetto al vincolo O e l'energia cinetica. Quindi

$$9Rm_0v = I_O\dot{\theta} + 9Rm_0v' \tag{28}$$

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_0v'^2. \tag{29}$$

Risolvendo il sistema è possibile ricavare la velocità v

$$v = \dot{\theta}\left(\frac{I_0}{18Rm_0} + \frac{9}{2}R\right), \tag{30}$$

in cui va sostituita la velocità angolare delle oscillazioni al punto di equilibrio, cioè $\dot{\theta} = \dot{\theta}_{\max} = \theta_{\text{eq}}\Omega$.

$$\boxed{v = \theta_{\text{eq}}\Omega\left(\frac{I_0}{18Rm_0} + \frac{9}{2}R\right) = 6.56 \text{ m/s}}. \tag{31}$$

e) Se la lunghezza a riposo delle molle non coincide con H la somma dei momenti delle forze esterne sarà

$$\sum \tau_O = -9R(m_2-m_1)g - 9Rk_1(H+9R\sin\theta-l_0) + 9Rk_2(H-9R\sin\theta-l_0), \tag{32}$$

che uguagliata a zero dà l'angolo di equilibrio

$$\sin\theta_{eq} = \frac{-g(m_2-m_1) + (l_0-H)(k_1-k_2)}{9R(k_1+k_2)}. \tag{33}$$

Con $l_0 = L$ otteniamo

$$\boxed{\theta_{eq} \simeq \sin\theta_{eq} = 0.15137 \simeq 8.7^\circ}. \tag{34}$$

Scrivendo l'equazione del moto per $\delta\theta = \theta - \theta_{eq}$ si ottiene nuovamente (24), quindi il periodo sarà lo stesso e la legge oraria avrà la stessa forma con il nuovo angolo di equilibrio.