Soluzione esercizio I.1

a) La lattina si muove di rotolamento puro rispetto al nastro. Quando questo è accelerato con accelerazione costante a_N la lattina subisce una forza di attrito costante orizzontale. Questa è l'unica forza che agisce sulla lattina in direzione orizzontale e non è nulla, quindi il centro di massa della lattina si muove con accelerazione orizzontale costante a.

Per determinare questa accelerazione scriviamo le equazioni del moto nel sistema di riferimento non inerziale, solidale col nastro, dove l'accelerazione del centro di massa sarà a'

$$\begin{cases} ma' = -ma_N + F_{att} \\ I\alpha = RF_{att} \end{cases} \tag{1}$$

dove con I indichiamo il momento d'inerzia del cilindro omogeneo rispetto al proprio asse di simmetria, $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Usando la condizione del rotolamento puro

$$a' = -\alpha R, \tag{2}$$

si ottiene

$$m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)a' = -ma_N \tag{3}$$

da cui, inserendo l'espressione del momento d'inerzia,

$$a' = -\frac{2}{3}a_N \implies \boxed{\alpha = \frac{2}{3}\frac{a_N}{R}} \tag{4}$$

La condizione che lega le accelerazioni espresse nei due sistemi di riferimento è $a = a' + a_N$, quindi, rispetto all'osservatore inerziale esterno la lattina ruota in senso antiorario e il suo centro di massa si muove in avanti con accelerazione

$$\boxed{a = \frac{1}{3}a_N} \tag{5}$$

Si noti che la forza di attrito subita dalla lattina è

$$F_{att} = \frac{I\alpha}{R} = \frac{1}{3}ma_N, \tag{6}$$

e non dipende dal coefficiente di attrito.

Questo sistema è analogo al rotolamento puro di un cilindro omogeneo che inizialmente fermo viene lasciato su un piano inclinato. La proiezione della forza di gravità agirà in maniera equivalente alla forza apparente nel sistema del nastro accelerato.

In una situazione più realistica al supermercato, si avrà che il nastro parte con una accelerazione iniziale, per poi muoversi di velocità costante ed infine decelerare e fermarsi. Durante la fase di velocità costante, in condizione di rotolamento puro, la forza di attrito è praticamente nulla e la lattina continuerà a ruotare su sé stessa con velocità angolare costante (il centro di massa sarà fermo rispetto all'osservatore esterno). L'arresto del nastro, infine farà muovere la lattina verso sinistra, inizialmente accelerando e poi, quando il nastro sarà fermo, di velocità costante, sempre con moto di puro rotolamento.

b) La lattina comincerà a slittare quando l'attrito statico richiesto per mantenere il rotolamento puro sarà maggiore del massimo attrito statico:

$$I\alpha = RF_{att} < R\mu_s Mg. \tag{7}$$

Sostituendo α trovato sopra si ottiene che

$$\boxed{a_N < 3\mu_s g = 7.36 \text{ m/s}^2} \tag{8}$$

è la condizione sull'accelerazione del vassoio per avere rotolamento puro, oltre il barattolo comincerà a slittare.

c) L'energia cinetica rispetto al centro di massa è semplicemente

$$\boxed{E_K^{CM}(t) = \frac{1}{2}I\omega^2(t) = \frac{1}{2}I(\alpha t)^2 = \frac{1}{9}Ma_N^2 t^2} \tag{9}$$

Rispetto al riferimento inerziale abbiamo invece dobbiamo aggiungere a quest'ultima l'energia cinetica di traslazione del centro di massa

$$\boxed{E_K(t) = E_K^{CM}(t) + \frac{1}{2}M\left(\frac{a_N}{3}t\right)^2 = \frac{1}{6}Ma_N^2 t^2} \tag{10}$$

d) Il momento angolare può essere scomposto come la somma di quello rispetto al centro di massa e di quello dovuto al moto del centro di massa:

$$\boxed{L_z(t) = I_{CM}\omega(t) - Rmv(t) = \frac{mRa_N}{3}t - \frac{mRa_N}{3}t = 0} \tag{11}$$

Questo risultato poteva essere atteso in quanto, rispetto al polo che abbiamo preso in considerazione, non ci sono momenti delle forze esterne (quella di attrito), quindi il momento angolare si conserva e mantiene il valore che aveva prima dell'inizio dell'accelerazione, quando tutto era in quiete.

e) Scriviamo le equazioni del moto attorno al punto di equilibrio

$$\begin{cases} ma = -2k\Delta x + F_{att} \\ I\alpha = F_{att}\ R \end{cases} . \tag{12}$$

Sostituendo la forza di attrito ed usando la condizione di rotolamento puro (2) si ottiene l'equazione

$$\ddot{\Delta x} = -\frac{4}{3}\frac{k}{m}\Delta x, \tag{13}$$

che è un'equazione armonica da cui possiamo ricavare il periodo

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}} = 1.86\ \mathrm{s}} \tag{14}$$

Soluzione esercizio I.2

a) Il momento angolare totale rispetto al centro della piattaforma si conserva, infatti l'unica forza esterna che può fare momento è la reazione vincolare sull'asse della piattaforma (che dà un momento nullo essendo applicata proprio sull'asse). Quindi possiamo uguagliare il momento angolare prima del lancio con quello dopo il lancio:

$$0 = I\omega - \frac{R}{2}m_0 v_b, \tag{15}$$

dove il momento d'inerzia è la somma di quello della piattaforma e di quello della giocatrice

$$I = \frac{MR^2}{2} + m\left(\frac{R}{2}\right)^2. \tag{16}$$

La velocitá angolare della piattaforma dopo il lancio sarà quindi

$$\boxed{\omega = \frac{m_0 v_b}{R(M + \frac{m}{2})} = 0.104\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \sim 1\ \frac{\mathrm{giri}}{\mathrm{min}}} \tag{17}$$

b) A questo punto la giocatrice farà un moto circolare uniforme. La piattaforma deve quindi esercitare, oltre alla reazione vincolare verticale per bilanciare la forza peso, anche una forza di attrito statico che fornisca la necessaria accelerazione centripeta. Abbiamo quindi

$$\boxed{\begin{cases} N_z = mg = 490.5\ \ \mathrm{N} \\ N_r = m\frac{R}{2}\omega^2 = 1.35\ \ \mathrm{N} \end{cases}} \tag{18}$$

c) Prendiamo gli assi del sistema di riferimento inerziale centrati nel centro della piattaforma e orientati di modo che la pietra venga lanciata in direzione $-y$ dalla posizione iniziale (R/2,0). Il tratto che deve percorrere per arrivare al bordo del disco è lungo $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ e quindi le coordinate cartesiane della pietra quando raggiunge il bordo sono

$$(x_p, y_p) = \left(\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}R\right) \tag{19}$$

Per arrivare impiegherà un tempo

$$t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{R}{v_b}. \tag{20}$$

Nel frattempo la giocatrice avrà percorso un angolo

$$\theta_0 = \omega\ t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m_0}{M + m/2} = 0.096 \text{ rad}, \tag{21}$$

le coordinate cartesiane saranno quindi

$$(x_g, y_g) = \left(\frac{R}{2}\cos\theta_0, \frac{R}{2}\sin\theta_0\right). \tag{22}$$

La distanza tra le due a questo punto può essere calcolata come

$$\boxed{\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(\frac{R}{2}\cos\theta_0 - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\sin\theta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2} \\ &= R\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\cos\theta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_0} \\ &= 4.09 \text{ m.} \end{aligned}} \tag{23}$$

d) L'equazione del moto della pietra nel sistema di riferimento in rotazione sarà

$$\boxed{m_0\vec{a'} = -m_0\left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})\right) - 2m_0\vec{\omega} \times \vec{v'}_b} \tag{24}$$

dove le quantità primate sono quelle rispetto al sistema di riferimento non inerziale.

La traiettoria non si può ricavare analiticamente ma ci si può aspettare sarà una spirale che parte da $R/2$.

E' comunque possibile scrivere le leggi orarie considerando che nel sistema di riferimento inerziale la legge oraria è

$$\begin{cases} x(t) = \frac{R}{2} \\ y(t) = -v_b\ t \end{cases}, \tag{25}$$

quindi, in quello non inerziale, applicando una rotazione del sistema di riferimento, avremo

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{R}{2}\cos(\omega t) + v_b\ t\ \ \sin(\omega t) \\ y'(t) = \frac{R}{2}\sin(\omega t) - v_b\ t\ \ \cos(\omega t) \end{cases} \tag{26}$$

e) Durante gli spostamenti della giocatrice il momento angolare si conserva, quindi la velocità angolare del sistema è legata a quella iniziale da

$$I(r)\omega(r) = I\omega \tag{27}$$

da cui

$$\boxed{\omega(r) = \frac{MR^2/2 + mR^2/4}{MR^2/2 + mr^2}\ \omega = -\frac{m_0 v_b}{MR}\frac{1}{1 + 2\frac{mr^2}{MR^2}}} \tag{28}$$

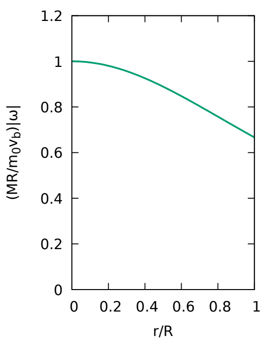

Figura 1: Velocità angolare in funzione della posizione della giocatrice.