1 Per ottenere un'accelerazione equivalente a quella terrestre al suolo basta porre

$$a_c\ (\text{centripeta}) = g = \omega_i^2 R$$

$$\omega_i = \sqrt{g/R} = 0.374\ \text{rad/s} \quad (1\ \text{giro ogni} \sim 17'')$$

⇒

In seguito allo spostamento dei moduli (operato da forze interne) il momento angolare del sistema non cambia,

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \text{ovvero} \quad I_i \vec{\omega}_i = I_f \vec{\omega}_f$$

Nel caso in esame $I_i = M_A R^2 + 3\times \frac{M_B R^2}{3} \simeq 3.19\times10^9\ \text{kg m}^2$

$$I_f = I_i + 3\times M_L R^2 \simeq 3.37\times10^9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

⇒ $$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i \frac{I_i}{I_i+3M_LR^2} = \vec{\omega}_i \frac{M_A+M_B}{M_A+M_B+3M_L} \simeq 0.95\,\vec{\omega}_i$$

⇒ $$\omega_f = 0.354\ \text{rad/s}$$

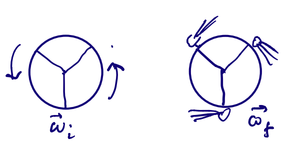
Il lavoro fatto è pari alla variazione di energia cinetica del sistema:

$$W = \Delta E_K = E_{Kf} = \frac12 I_f\omega_f^2 - \frac12 I_i\omega_i^2 = \frac12 I_f \frac{\omega_i^2 I_i^2}{I_f^2} - \frac12 I_i\omega_i^2 =$$

$$= \frac12 I_i\omega_i^2\left(\frac{I_i}{I_f}-1\right) = \frac12 I_i\omega_i^2 \left(\frac{-3M_L}{M_A+M_B+3M_L}\right) = -\frac32 \frac{(M_A+M_B)M_L}{M_A+M_B+3M_L}\, gR \simeq -1.2\times10^7\ \text{J}$$

La nuova accelerazione percepita è data da $g' = \omega_f^2 R \simeq 8.77\ \text{m/s}^2$.

Per riaccelerare la stazione è necessario avvalersi (per esempio) di razzi/getti esterni che possono variare il momento angolare:



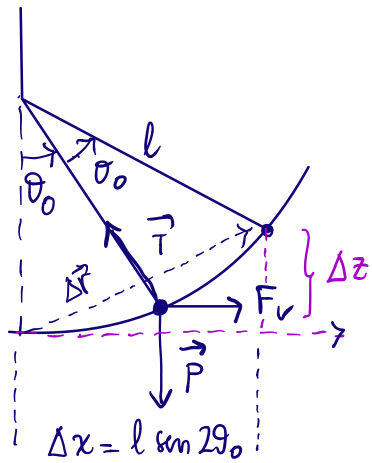
Il lavoro (minimo) anche in questo caso è dato dal teorema dell'energia cinetica:

$$W_{min} = E_{Kf} - E_{Ki} = \frac12 I_f\omega_i^2 - \frac12 I_f\omega_f^2$$ si vuole riottenere g come accelerazione

per cui $$W_{min} = \frac12 I_f\omega_i^2\left(1-\frac{\omega_f^2}{\omega_i^2}\right) = \frac12 (M_A+M_B+3M_L)\, gR\left[1-\frac{(M_A+M_B)^2}{(M_A+M_B+3M_L)^2}\right].$$

$$= \frac12 gR\left[\frac{(M_A+M_B+3M_L)^2-(M_A+M_B)^2}{M_A+M_B+3M_L}\right] = \frac12 gR\left[\frac{9M_L^2+6M_L(M_A+M_B)}{M_A+M_B+3M_L}\right] \sim 2.5\times10^7\ \text{J}$$

② Schema delle forze all'equilibrio in presenza di vento:



$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_V = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$F_V = T \sin\theta_0$$
$$P = T\cos\theta_0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{F_V}{P} = \frac{F_V}{mg} = 0.25$$

$$\Rightarrow \theta_0 \simeq 14.04°$$

Massima quota $\boxed{\Delta z = l\,(1 - \cos 2\theta_0) \simeq 0.35\ \text{m}}$

Lavoro svolto da $\vec{F}_V$ per guadagnare la quota Δz:

$$\boxed{W = \vec{F}_V \cdot \Delta\vec{r} = F_V\,\Delta x = F_V \cdot l \sin 2\theta_0 \simeq 277\ \text{J}}$$

Per calcolare il tempo necessario per guadagnare la quota Δz si deve prima ottenere il (semi) periodo dell'oscillazione «corta» con il vento. A questo scopo è possibile considerare il caso di un pendolo con equilibrio centrato attorno all'angolo θ_0 e soggetto al risultante $\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_V$ che dà luogo a una accelerazione efficace $\vec{g}_{eff}$ di intensità

$$g_{eff} = \sqrt{g^2 + (F_V/m)^2} \simeq 10.1\ m/s^2$$

per la quale $T = 2\pi\sqrt{l/g_{eff}} \simeq 3.42\ s$ $\Rightarrow$ il tempo di salita è

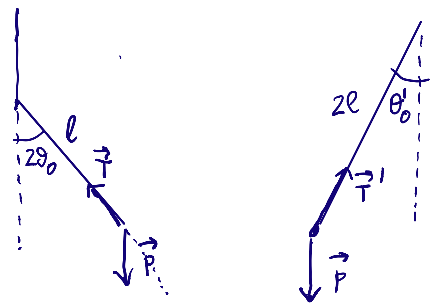
$$\boxed{\Delta t = T/2 \cong 1.71\ s}$$

Per ottenere il periodo di oscillazione complessivo (senza vento) è sufficiente sommare i due semi-periodi ("corto" e "lungo"):

$$\boxed{\begin{aligned} T_{tot} &= \frac{T^{(corto)}}{2} + \frac{T^{(lungo)}}{2} = \\ &= \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} + \pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}} = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,(1+\sqrt{2}) \cong 4.2\ \mathrm{s} \end{aligned}}$$

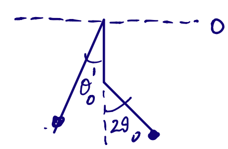
Le tensioni nei punti di inversione (quiete) dello scalatore si ottengono dalle

$$\boxed{\begin{aligned} T &= P\cos 2\vartheta_0 \\ &\cong 692\ \mathrm{N} \end{aligned}}$$



$T' = P\cos\theta_0'$

Per calcolare θ_0' si applica la conservazione dell'energia (qui solo potenziale perché sono punti di quiete):



$$mg\ell(1+\cos 2\vartheta_0) = mg\cdot 2\ell\cos\theta_0'$$

$$\Rightarrow \cos\theta_0' = \frac{1+\cos 2\vartheta_0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T' = mg\left(\frac{1+\cos 2\vartheta_0}{2}\right) = \frac{mg+T}{2} \approx 738\ \mathrm{N}}$$

La tensione nel punto verticale si ottiene dalla somma vettoriale delle forze in modulo

$$T_V = mg + \frac{mv_V^2}{2\ell}$$

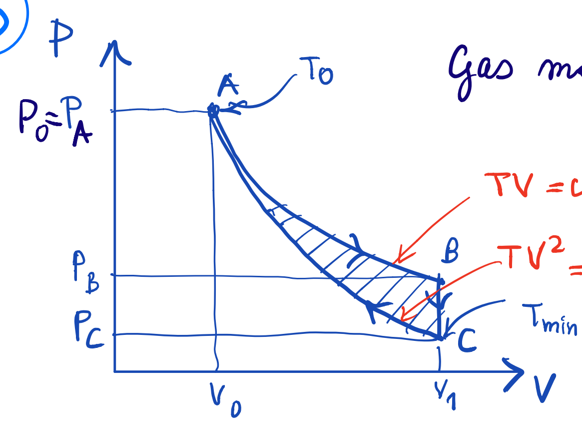
dove v_V è ottenuta dalla conservazione dell'energia sul lato "lungo" (per esempio):

$$\frac{1}{2}mv_V^2 = mg\cdot 2\ell(1-\cos\theta_0') = mg\cdot\ell\,(1-\cos 2\vartheta_0)$$

$$\Rightarrow v_V^2 = 2g\ell(1-\cos 2\vartheta_0) \Rightarrow \boxed{T_V = mg(2-\cos 2\vartheta_0) \approx 876\ \mathrm{N}.}$$

Il moto in presenza di aria è un oscillatore armonico smorzato.

3



$TV = \text{cost} \iff PV^2 = \text{cost}$

$TV^2 = \text{cost} \iff PV^3 = \text{cost}$

Gas monoatomico, $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$

Per una generica trasformazione politropica $PV^\alpha = \text{cost}$ reversibile si ricava applicando l'equazione di stato e il I principio

$$W = \frac{\Delta(PV)}{1-\alpha} = \frac{nR}{1-\alpha}\Delta T$$

$$Q = \frac{c_v}{R}\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-1}\Delta(PV) = n c_v \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-1}\Delta T$$

con $\alpha \neq 1$
e $\gamma = c_p/c_v$

Nel ciclo in esame, posto $V_1/V_0 = r > 1$, si ha:

$A \to B$ $\quad \Delta(PV) = P_B V_1 - P_0 V_0 = P_0 V_0 \left(\frac{P_B}{P_0}\frac{V_1}{V_0} - 1\right) = nRT_0\left(\frac{1}{r} - 1\right) = nRT_0\left(\frac{1-r}{r}\right),$

$\Rightarrow W_{AB} = nRT_0\left(\frac{r-1}{r}\right)$; $\quad Q_{AB} = \frac{3}{2}(2-\gamma)\, nRT_0\left(\frac{1-r}{r}\right) = \frac{nRT_0}{2}\left(\frac{1-r}{r}\right) < 0$

$B \to C$ $\quad \Delta(PV) = (P_C - P_B)V_1 = P_B V_1\left(\frac{P_C}{P_B} - 1\right) = nRT_0\left(\frac{1-r}{r^2}\right),$

$\Rightarrow W_{BC} = 0$, $\quad Q_{BC} = n c_v \Delta T = \frac{c_v}{R}\Delta(PV) = n c_v T_0\left(\frac{1-r}{r^2}\right) = \frac{3}{2} nRT_0\left(\frac{1-r}{r^2}\right) < 0$

$C \to A$ $\quad \Delta(PV) = P_0 V_0 - P_C V_1 = P_0 V_0\left(1 - \frac{P_C}{P_0}\frac{V_1}{V_0}\right) = nRT_0\left(1 - \frac{V_0^2}{V_1^2}\right) = nRT_0\left(\frac{r^2-1}{r^2}\right)$

$\Rightarrow W_{CA} = \frac{nRT_0}{2}\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)$; $\quad Q_{CA} = \frac{c_v}{R}\cdot\frac{3-\gamma}{2}\cdot nRT_0\left(\frac{r^2-1}{r^2}\right) = nRT_0\left(\frac{r^2-1}{r^2}\right) > 0$

Calcolo del rendimento:

$$\boxed{\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{IN}} = \frac{W_{AB} + W_{CA}}{Q_{CA}} = \frac{\frac{r-1}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right)}{\frac{r^2-1}{r^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{r-1}{r+1}\right).}$$

Ovviamente $0 \le \eta < 1^{(*)}$; inoltre vale il teorema di Carnot riferito al confronto con il rendimento di una macchina che opera reversibilmente fra due termostati alle temperature estreme. (*) In questo caso $\eta_{MAX} = 1/2$ per $r \to \infty$

Qui $T_{min} = T_C$ e $T_{max} = T_A = T_0$

e $$\frac{T_{min}}{T_{max}} = \frac{T_C}{T_0} = \frac{P_C V_1}{P_0 V_0} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \eta_{CARNOT} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = \frac{r^2-1}{r^2}.$$

Risulta $$\boxed{\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{r-1}{r+1}\right) < \frac{r^2-1}{r^2} = \eta_{CARNOT} \text{ per qualunque } r > 1}$$

Nel caso numerico $T_0 = 300\,K$, $n = 5$ moli e $r = 4$

$$\boxed{W_{TOT} = \frac{nRT_0}{2}\left(\frac{r-1}{r}\right)^2 = \frac{5}{2}\,\text{mol} \cdot 8.31\,\frac{J}{\text{mol}\cdot K} \cdot 300\,K \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3.5\,kJ}$$

Il teorema di Clausius qui è immediato perché è nella forma di eguaglianza $$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

che vale vista la reversibilità del ciclo.

Il calcolo del coefficiente di prestazione del ciclo frigorifero segue dalla sua definizione:

$$\omega = C.O.P. = \frac{Q^*_{IN}}{|W_{TOT}|}$$

dove ora $$Q^*_{IN} = -Q_{AB} - Q_{BC} = \frac{nRT_0}{2}\left(\frac{r-1}{r} + 3\,\frac{r-1}{r^2}\right) = \frac{nRT_0}{2}\,\frac{(r+3)(r-1)}{r^2}$$

per cui $$\boxed{\omega = \frac{r+3}{r-1}}$$

Si osserva che $\omega \to \infty$ quando $r \to 1$, ovvero il ciclo frigorifero non richiede lavoro per funzionare in questo limite (non realizzabile).

4 Coefficiente di espansione termica $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)$ nel caso di un'adiabatica reversibile di un gas ideale biatomico:

$$\delta Q = nc_V dT + PdV = nc_V dT + nRT\frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_V}{R} = -\frac{T}{V}\frac{dV}{dT} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{c_V}{RT}$$

Nel caso numerico richiesto $\beta(T_i) = -\frac{c_V}{RT_i}$, $\beta(T_f) = -\frac{c_V}{RT_f}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\beta = \beta(T_f) - \beta(T_i) = -\frac{c_V}{R}\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_i}\right) = -\frac{5}{2}\left(\frac{1}{280\,K} - \frac{1}{250\,K}\right) = 1.07\times 10^{-3}\,K^{-1}}$$