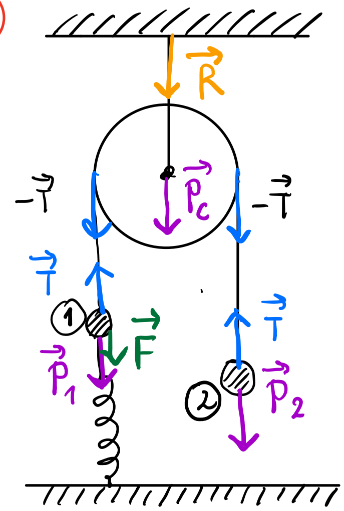
1.



Soluzione statica:

il sistema non può essere accelerato, per cui le tensioni sulla fune ai due lati della carrucola sono eguali (lo si vede anche dalla II equazione cardinale, che prevede all'equilibrio l'annullarsi del momento esterno delle forze).

Quindi $\begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0} \\ \vec{P}_2 + \vec{T} = \vec{0} \end{cases}$ e proiettando

$\left.\begin{matrix} P_1 + F = T \\ P_2 = T \end{matrix}\right\}$ ovvero $\begin{cases} m_1 g + k(x - l_0) = T \\ m_2 g = T \end{cases}$

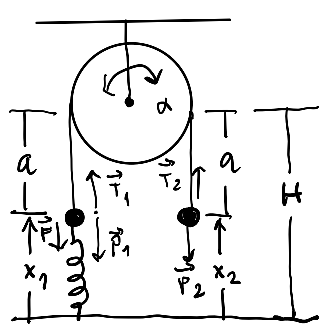
$$\Rightarrow \quad m_1 g + k(x - l_0) = m_2 g \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq} = l_0 + (m_2 - m_1) g / k = = 0.3\,m + \frac{(4 - 1.5)\,kg \times 9.8\,m/s^2}{245\ N/m} = 0.4\,m}$$

inoltre $\boxed{R = P_c + 2T = (M + 2m_2) g = 137\ N}$

Condizioni iniziali: $x_1(t=0) = x_2(t=0) = x_0 = H - a$ con $2a + \pi R = L$

ovvero $a = \dfrac{L - \pi R}{2}$

$= 1.5\,m$



Equazioni del moto:

$$m_1 \ddot{x}_1 = T_1 - m_1 g - k(x_1 - l_0)$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = T_2 - m_2 g$$
$$-T_1 R + T_2 R = I_0 \ddot{\theta} \quad \text{con} \quad I_0 = MR^2/2$$

e $\alpha = \ddot{\theta} = \dfrac{\ddot{x}_1}{R} = -\dfrac{\ddot{x}_2}{R}$ $\Rightarrow$ (sottraendo) $\Rightarrow$ $(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = \underbrace{T_1 - T_2}_{-I_0\ddot{\theta}/R = -M/2\,\ddot{x}_1} + (m_2 - m_1) g - k(x_1 - l_0)$

$\Rightarrow$ $\left(m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}\right)\ddot{x}_1 = (m_2 - m_1) g - k(x_1 - l_0)$ che è un moto armonico semplice con

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2 + M/2}} = 5.37\ s \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.17\ s$$

La legge oraria è $x_1(t) = x_{eq} + A\cos(\omega t + \phi)$, $\dot{x}_1(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$

con condizioni iniziali $x_1(t=0) = x_0 = x_{eq} + A\cos\phi$, $\dot{x}_1(t=0) = -\omega A \sin\phi = 0$

$\Rightarrow A = x_0 - x_{eq}$ $\qquad \Rightarrow \phi = 0$

$\Rightarrow$ qui x_{eq} è la coordinata di equilibrio statico, $x_{eq} = \frac{(m_2 - m_1)g}{k} + l_0 = 0.4\ \text{m}$

Quindi il moto è un'oscillazione di ampiezza $\pm A = \pm 0.1\ \text{m}$ attorno a $x_{eq} = 0.4\ \text{m}$.

Il momento angolare ha proiezioni:

$L_1^{(0)} = m_1 R \dot{x}_1(t)$ (per la massa 1 rispetto O)

$L_C^{(1)} = -MR\dot{x}_1(t) + I_0\dot{\theta} = -MR\dot{x}_1(t) - \frac{MR}{2}\dot{x}_1(t) = -\frac{3}{2}MR\,\omega A \sin\omega t$

(per la carrucola rispetto m_1)

L'energia cinetica della carrucola è $E_{k_C} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2} \cdot \frac{\dot{x}_1^2}{R^2} + \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2$

$= \frac{3}{4} M \dot{x}_1^2 = \frac{3}{4} M \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$

con valore massimo $E_{k_C}(max) = \frac{3}{4} M \omega^2 A^2 = 1{,}30\ \text{J}$

2. $\boxed{\text{Il moto è governato da una forza centrale} \rightarrow \text{si conserva l'energia meccanica e il momento angolare rispetto al centro delle forze.}}$

L'energia si scompone in cinetica radiale, angolare e potenziale:

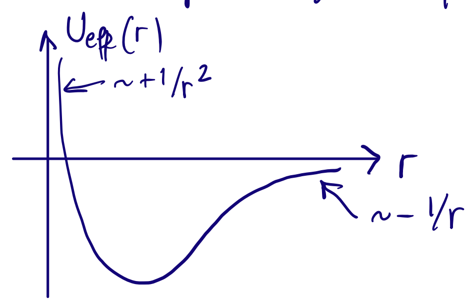
$$E = E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GmM}{r} \;;$$

il momento angolare ha modulo $L_0 = mrv_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{cost}$

$\Rightarrow$ l'energia cinetica angolare si scrive $\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mr^2}$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

dove si è introdotta l'energia potenziale efficace con grafico



In questo caso il momento angolare è fissato al valore $L_0 = mDv_0$, l'energia radiale è nulla e quella potenziale è $-GmM/D$.

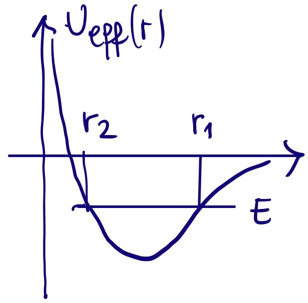
Quindi l'energia totale (costante) è $E = \frac{L_0^2}{2mD^2} - \frac{GmM}{D} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{D}$.

Si studia il problema energetico data la curva di potenziale U_{eff} per ottenere le distanze di max / min avvicinamento (apogeo / perigeo):

$$E = U_{eff}(r) \iff \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{D} = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = \frac{mv_0^2}{2}\frac{D^2}{r^2} - \frac{GmM}{r}$$

$$\iff v_0^2\left(1 - \frac{D^2}{r^2}\right) = 2GM\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{r}\right) \iff v_0^2\frac{(r^2-D^2)}{r} = 2GM\frac{(r-D)}{D}$$

che ha soluzioni $\boxed{r_1 = D, \quad r_2 = \frac{D^2v_0^2}{2GM - Dv_0^2} = D\frac{1}{\frac{2GM}{Dv_0^2} - 1}}$;



bisogna studiare la relazione che c'è fra r_1 e r_2 in funzione di v_0.

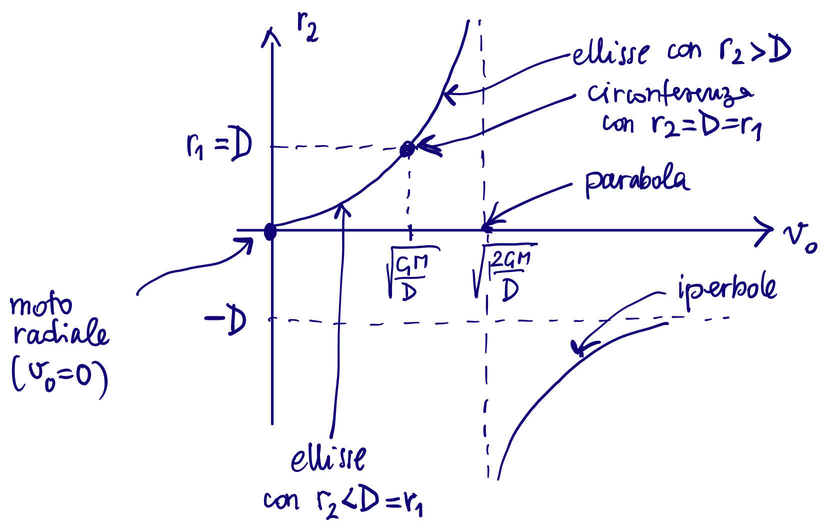
Si vede che se $v_0 < \sqrt{\frac{GM}{D}} \Rightarrow r_2 < r_1$ ovvero il satellite percorrerà un orbita ellittica con perigeo r_2 e apogeo r_1.

Se invece $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{D}} \Rightarrow r_1 = r_2 = D$ ovvero il satellite percorrerà un'orbita circolare mantenendo un raggio D.

Per $\sqrt{\frac{GM}{D}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{D}}$ l'orbita torna a essere ellittica però in questo caso $r_1 < r_2$ e dunque il satellite ha perigeo nella posizione iniziale.

Per $v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{D}}$ l'orbita si apre e diventa parabolica $\left(v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{D}}\right)$ con perigeo D o iperbolica $\left(v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{D}}\right)$.

L'andamento delle coordinate radiali di max/min avvicinamento in funzione di v_0, ovvero le espressioni $r_1 = D$, $r_2 = D \frac{1}{\frac{2GM}{Dv_0^2} - 1}$ è



3. E' sufficiente utilizzare il I principio della termodinamica nella forma ciclica:

$$0 = \Delta U = W - Q \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i Q_i = W$$

ovvero $\quad Q_1 + Q_2 + Q_3 = W \quad$ dove i Q_i sono calori scambiati lungo i tre rami isotermi;

si utilizza poi il II principio della termodinamica nella forma di eguaglianza di Clausius,

$$\sum_i Q_i/T_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0 \, .$$

Si indicano con Q_1, Q_2 i calori isotermi (assorbiti) nelle espansioni e con Q_3 il calore isotermo (ceduto) nella compressione (NB: Q_3 e W sono dati assegnati del problema).

Mettendo a sistema le $\begin{cases} Q_1+Q_2+Q_3=W \\ Q_1/T_1 + Q_2/T_2 + Q_3/T_3 = 0 \end{cases}$ si ottengono le

$$Q_1 = \frac{T_1}{T_2-T_1}\left[Q_3\left(1-\frac{T_2}{T_3}\right)-W\right], \quad Q_2 = \frac{T_2}{T_2-T_1}\left[W - Q_3\left(1-\frac{T_1}{T_3}\right)\right]$$

Posto $\quad W = 100\,\text{J}, \; Q_3 = -6500\,\text{J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} Q_1 = 4.23\,\text{kJ} \\ Q_2 = 2.37\,\text{kJ} \end{array}}$.

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_{IN}} = \frac{W}{Q_1+Q_2} = \frac{100\,\text{J}}{6.60\times10^3\,\text{J}} = 0.015 \, , \quad \eta_{CARNOT} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0.133 > \eta}$$

Nei tratti isotermi valgono le

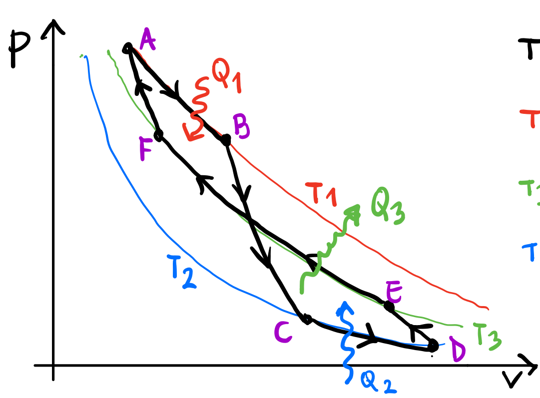
$$\boxed{\begin{array}{l} nRT_1 \ln(V_B/V_A) = Q_1 \Rightarrow V_B/V_A = 2.57 \\ nR\,T_2 \ln(V_D/V_C) = Q_2 \Rightarrow V_D/V_C = 1.83 \\ nR\,T_3 \ln(V_F/V_E) = Q_3 \Rightarrow V_F/V_E = 0.21 \end{array}}$$

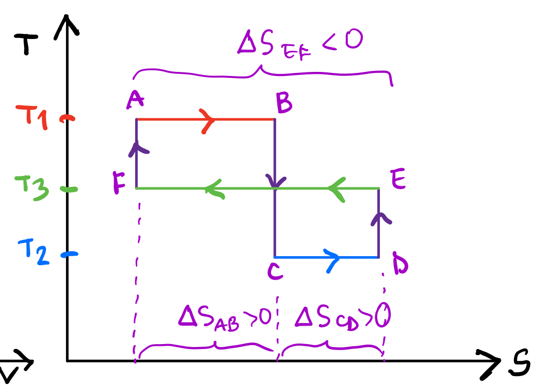
Nei tratti adiabatici valgono le

$$\boxed{\begin{array}{l} V_C/V_B = (T_1/T_2)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1.24 \\ V_D/V_E = (T_3/T_2)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1.12 \\ V_F/V_A = (T_1/T_3)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1.11 \end{array}}$$

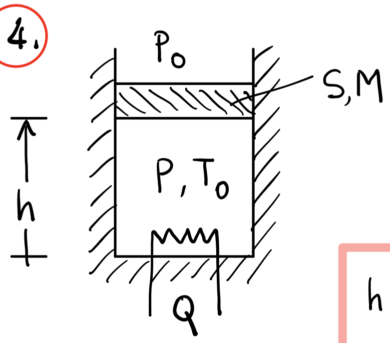
$$\boxed{\Delta S_{AB} = Q_1/T_1 = 14.1\,\text{J/K}\,; \; \Delta S_{BC} = 0; \; \Delta S_{CD} = Q_2/T_2 = 9.1\,\text{J/K}; \; \Delta S_{DE} = 0\,; \; \Delta S_{EF} = Q_3/T_3 = -23.2\,\text{J/K}}$$

$$\boxed{\Delta U_{AB} = 0\,; \Delta U_{BC} = nc_V(T_2-T_1) = -897\,\text{J}; \; \Delta U_{CD} = 0; \; \Delta U_{DE} = nc_V(T_3-T_2) = +449\,\text{J}; \; \Delta U_{EF} = 0; \; \Delta U_{FA} = nc_V(T_1-T_3) = 449\,\text{J}}$$





4.



La condizione iniziale di equilibrio statico è

$$P = P_0 + \frac{Mg}{S} = \frac{nRT_0}{V} = \frac{nRT_0}{S\cdot h}$$

$$\boxed{h = \frac{nRT_0}{SP_0+Mg} = \frac{3\times 8.3\times 310\ \mathrm{J}}{(80\times10^{-4}\times10^{5}+1250\times9.8)\,\mathrm{N}} \cong 0.59\,\mathrm{m}}$$

La trasformazione è quasi-statica e senza attriti di tipo isobaro, con pressione sempre all'equilibrio con $P = P_0 + Mg/S$.

Il calore immesso è tale da variare la temperatura secondo la

$$Q = nc_p\Delta T \Rightarrow \boxed{T_f = T_0 + Q/nc_p = 310\,\mathrm{K} + \frac{600\times4.18}{3\times\frac{5}{2}\times8.3}\,\mathrm{K} \cong 350\,\mathrm{K}}$$

Vale anche, dall'equazione di stato con $P = \text{cost}$, che

$$\Delta V = \frac{nR\Delta T}{P} = S\Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{nR\Delta T}{P\cdot S} = Q\cdot\frac{R}{c_p}\,\frac{1}{P_0S+Mg} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta h = \frac{600\times4.18}{2.5}\,\frac{1}{(80\times10^{-4}\times10^{5}+1250\times9.8)}\,\mathrm{m} \cong 7.7\,\mathrm{cm}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta S_{gas}\,(\text{isobara}) = nc_p\ln\frac{T_f}{T_i} = 3\times2.5\times8.3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot\ln\frac{350}{310} \cong 7.6\,\mathrm{J/K} \\ \Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = 0\ (\text{reversibile}) \Rightarrow \Delta S_{amb} = -7.6\,\mathrm{J/K} \end{array}}$$

Frazione di energia immessa utilizzata per sollevare il pistone ⇒ per eseguire lavoro meccanico :

$$\boxed{f = \frac{W}{Q} = \frac{P\Delta V}{Q} = \frac{nR\Delta T}{nc_p\Delta T} = \frac{R}{c_p} = \frac{2}{5} = 0.4}$$