Prodotto «interno» (scalare) fra vettori.

Si parte con l'idea che la lunghezza di un vettore $\vec{A} \equiv (A_x, A_y)$ non cambia per rotazioni / traslazioni degli assi, cioè

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 = \text{invariante}$$

questo vale per qualunque vettore. Quindi anche per $\vec{B}$ e per la somma $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$. Dunque

$$S_x^2 + S_y^2 = (A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 \quad \text{non cambia;}$$

ma risulta

$$S_x^2 + S_y^2 = \underbrace{A_x^2 + A_y^2}_{A^2} + \underbrace{B_x^2 + B_y^2}_{B^2} + 2\underbrace{(A_x B_x + A_y B_y)}$$

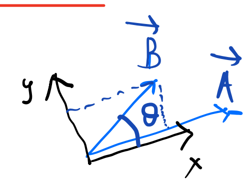
$\Rightarrow$ anche questo non cambia.

non cambia   non cambia

> Si definisce il prodotto SCALARE / INTERNO fra $\vec{A}$ e $\vec{B}$ il numero
>
> $$C = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \quad (+ A_z B_z \text{ in 3Dim}).$$

NB1 C non cambia con gli assi!

Si scelgono x e y tali che $\vec{A} = (A_x, 0)$ $\Rightarrow$ $C = A_x B_x = A B \cos\theta$ (sempre).



NB2 se i vettori sono perpendicolari $\Rightarrow$ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

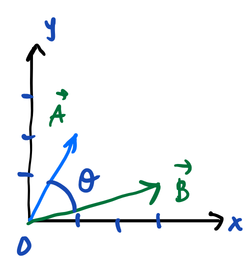
se i vettori sono paralleli $\Rightarrow$ $\vec{A} \cdot \vec{B} = \pm A B$

NB3 $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$; $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$

NB4 esempio $\vec{A} \equiv (1,2)$; $\vec{B} \equiv (3,1)$; $C = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$

$A = \sqrt{5}$
$B = \sqrt{10}$
$\cos\theta = \frac{C}{A \cdot B} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

NB5: $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$

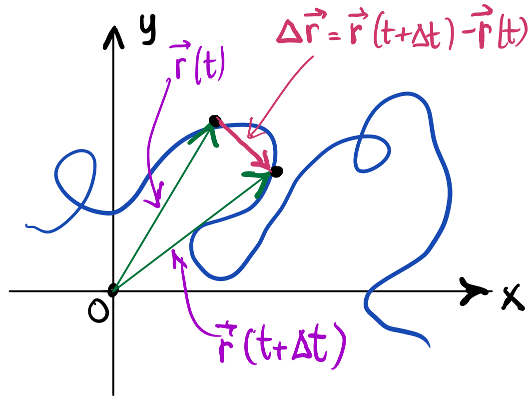


Cinematica del punto materiale in 2 dimensioni

Necessità di ESTENDERE le idee della cinematica 1D a casi in 2D e 3D.

Si recuperano tutte le definizioni di velocità e accelerazione e, tramite l'algebra dei vettori, si riscrivono e si applicano ai moti sul piano (e fuori piano).

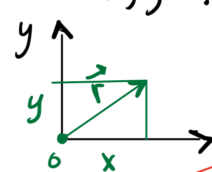
Caso di moti nel piano



NB la curva è una TRAIETTORIA, non una legge oraria (sugli assi non compare il tempo!)

Descrizione del moto tramite il vettore posizione $\vec{r}(t)$, che è riconducibile alla coppia di componenti cartesiane x, y:

$$\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t))$$



In un intervallo di tempo Δt il punto si sposta fino a raggiungere la nuova posizione nel tempo $t + \Delta t$ data da

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$$

NB si può usare anche la notazione $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$

dove si è introdotto il $\boxed{\text{vettore spostamento } \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}$.

con componenti secondo gli assi coordinati cartesiani date da

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y) = \left(x(t+\Delta t) - x(t),\ y(t+\Delta t) - y(t)\right)$$

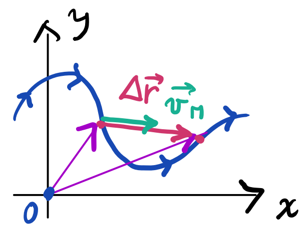
- La velocità media (vettoriale) è data dal vettore

$$\vec{v}_M = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

[che si scompone lungo x e y come $\vec{v}_M = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$]

$\Rightarrow$ $\vec{v}_M$ è parallela a $\Delta\vec{r}$

vuol dire: la velocità in media porta il punto lungo lo spostamento ...



$\vec{v}_M = (v_{Mx}, v_{My})$

$v_{Mx} = \Delta x / \Delta t$

$v_{My} = \Delta y / \Delta t$

- Si costruisce la velocità (vettoriale) istantanea

utilizzando il limite "a infinita risoluzione temporale" già usato nel caso rettilineo,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

ovvero $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$ ← ma che vettore è?

[cioè: quanto vale e come è diretto?]

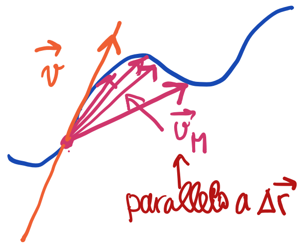
- Caratteristiche del vettore $\vec{v}$

Ha componenti cartesiane $\vec{v} = (v_x, v_y) = \hat{\imath}\, v_x + \hat{\jmath}\, v_y = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$

LE COMPONENTI SONO LE VELOCITÀ LUNGO x e y

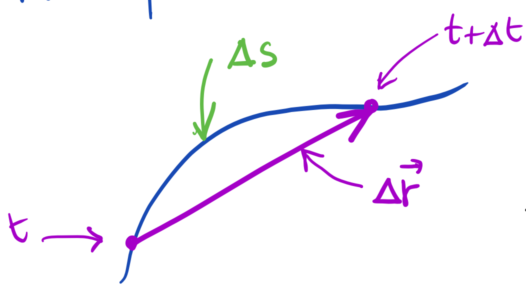
Quindi ha intensità (modulo) data da

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$



Intuitivamente $\vec{v}$ deve risultare $\boxed{\text{tangente}}$ alla traiettoria del punto in qualunque sua posizione.

Più esplicitamente



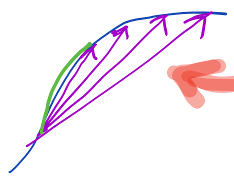
Δs è la strada (coordinata curvilinea) percorsa con segno

$\Delta\vec{r}$ è il vettore spostamento

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

quando $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{r}$ in modulo tende a Δs e ha direzione tangente. Dunque $\Delta\vec{r}/\Delta s$ tende al VERSORE TANGENTE:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \hat{u}_T$$



questo rapporto quando $\Delta t \to 0$ esprime la velocità stradale o curvilinea

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \to v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |\dot{s}|$$

Si indica qui con $v_s = \dot{s}$ la velocità scalare «intrinseca» [ha segno a seconda del verso di percorrenza, v invece è sempre positiva]

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{NB}} \quad \text{NON CONFONDERE} \\ \text{il VETTORE } \vec{v} \text{ con } v = |ds/dt| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\end{array}}$

• → Quindi

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \hat{u}_T\, v_s}$$

direzione SEMPRE tangente

velocità intrinseca ("stradale", $v = |v_s|$)