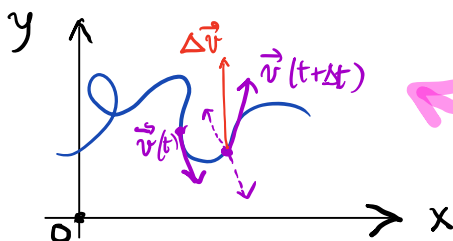


- ➔ L'accelerazione è definita in perfetta analogia e corrispondenza con il caso 1D e rappresenta quindi la variazione (media o istantanea) nel tempo del vettore velocità :

$$\vec{a}_M = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

➔ Novità: ora questa variazione si riferisce contemporaneamente al modulo e alla direzione della velocità.



Il vettore $\Delta \vec{v}$ è non nullo anche se v non varia in modulo ma solo in direzione

In pratica ci si aspetta di dover tener conto di due accelerazioni : una che misura la variazione di v (modulo), l'altra che misura la direzione di $\vec{v}$ (vettore).

Più esplicitamente si parte dalla $\vec{v} = v_s \hat{u}_T$ ← direzione (tangente)
↑
velocità intrinseca

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_s \hat{u}_T) = \underbrace{\frac{dv_s}{dt} \hat{u}_T}_{\text{variazione della velocità stradale (accelerazione)}} + \underbrace{v_s \frac{d\hat{u}_T}{dt}}_{\text{variazione della direzione di } \vec{v} \text{ (sterzo)}}$$

questa è un'accelerazione tangenziale (diretta secondo $\hat{u}_T$)

di modulo $\frac{dv_s}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$:

NON È $\frac{d\vec{v}}{dt}$; $\boxed{\vec{a}_T = \frac{dv_s}{dt} \hat{u}_T}$

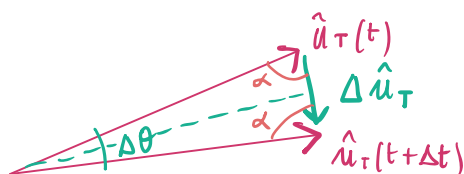
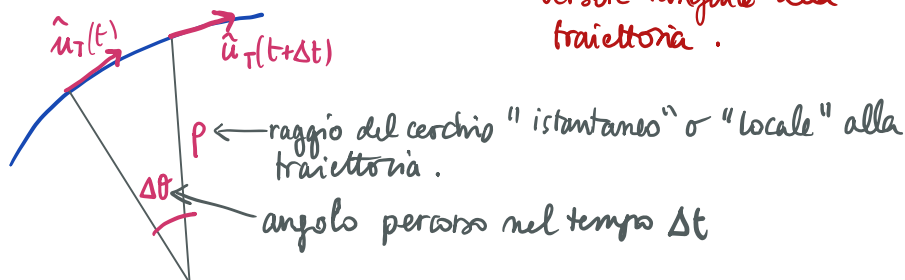
questa accelerazione è una novità e va determinata.

L'accelerazione totale $\vec{a}$ è composta sia da $\vec{a}_T$ che da quella di sterzo!

- ➔ Determinazione dell'accelerazione "di sterzo",

$$\vec{a}_{\text{STERZO}} = v_s \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

bisogna calcolare la variazione nel tempo del versore tangente alla traiettoria.



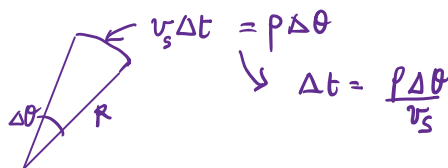
Osservare bene il triangolo isoscele con lati $\hat{u}_T$ (di modulo 1, è un versore) e angoli alla base α .

$$\text{Vale } \Delta\theta + 2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}.$$

Quando $\Delta\theta \rightarrow 0$ (perché ci serve che $\Delta t \rightarrow 0$) è $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, per cui $\Delta\hat{u}_T$ è perpendicolare a $\hat{u}_T$ se $\Delta t \rightarrow 0$;

poi vale che, in modulo, $\Delta u_T = 2|\hat{u}_T| \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{\Delta u_T}{\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \quad \text{Inoltre}$$



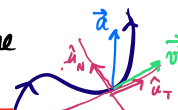
$$\Rightarrow \frac{\Delta u_T}{\Delta t} = \frac{2v_s}{\rho \Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{v_s}{\rho} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} \xrightarrow{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{v_s}{\rho} \quad \text{perché } \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

$$\text{dunque } \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \hat{u}_N \frac{v_s}{\rho} \Rightarrow \vec{a}_{\text{STERZO}} = v_s \frac{d\hat{u}_T}{dt} = v_s \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{u}_T}{\Delta t} = \frac{v_s^2}{\rho} \hat{u}_N$$

$v_s^2 = v^2$ (non serve più "s")
 direzione perpendicolare a $\hat{u}_T$, "NORMALE"

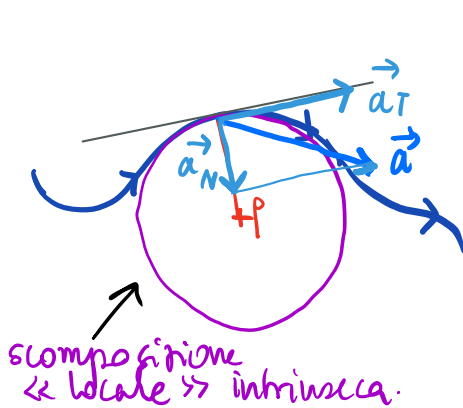
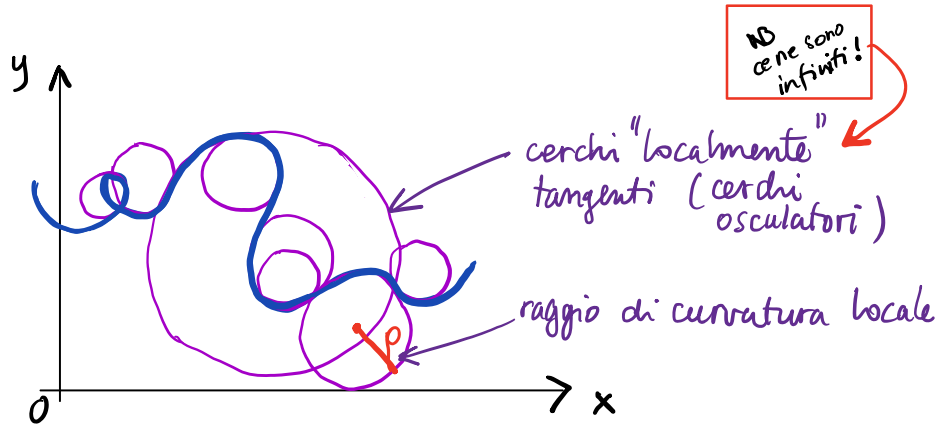
- ➔ scomposizione generale vettoriale dell'accelerazione intrinseca

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv_s}{dt} \hat{u}_T + \frac{v_s^2}{\rho} \hat{u}_N = \dot{v}_s \hat{u}_T + \frac{v_s^2}{\rho} \hat{u}_N$$



Vale per qualunque traiettoria curva (non solo circolare)

Traiettoria curvilinea generale, significato del raggio ρ



Si approssima la curva con un cerchio tangente di raggio ρ opportuno e si calcolano le componenti tangente e normale ("centripeta") dell'accelerazione

$$a_T = \frac{dv_s}{dt} \quad , \quad a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

In punti diversi in generale cambia il raggio del cerchio tangente.

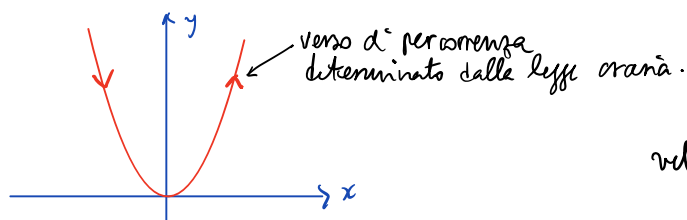
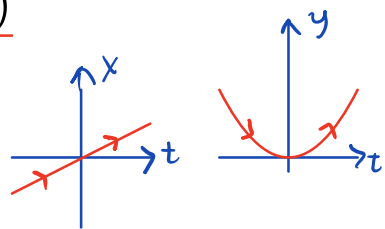
Si usa anche la "curvatura" k intesa come il reciproco del raggio osculatore, $k = 1/\rho$, dove

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \text{oppure} \quad k = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Esempio ("adimensionale" per convenienza)

leggi orarie $x(t) = t/2 \rightarrow \dot{x}(t) = 1/2$
 $y(t) = t^2/4 \rightarrow \dot{y}(t) = t/2$

traiettoria $t = 2x \rightarrow y = x^2$



verso di percorrenza
determinato dalle leggi orarie.

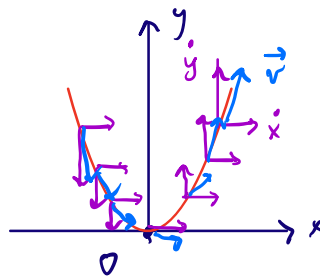
velocità $v = |\vec{v}| = |\vec{v}_s| = |\dot{s}|$

$$= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + t^2}$$

$\vec{v}$ è il vettore tangente alla traiettoria
secondo il verso

$$\hat{u}_T = \frac{\vec{v}}{v} = \left(\frac{\dot{x}}{v}, \frac{\dot{y}}{v} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \right)$$

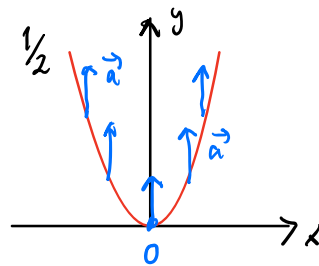
NB $\vec{v}$ ha intensità e direzione variabili
(lungo la traiettoria e nel tempo).



Ci si aspetta quindi un'accelerazione che spieghi questi fatti.

$$a_x = \ddot{x} = 0 \quad a_y = \ddot{y} = 1/2$$

$$a = |\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1/2$$



Scomposizione intrinseca $\vec{a} = \ddot{s} \hat{u}_T + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{u}_N$

$$a_T = \ddot{s} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sqrt{t^2+1} = \frac{t}{2\sqrt{t^2+1}};$$

$$a_N = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{4(t^2+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}};$$

$a_T \geq 0$ per $t \geq 0$ [accelerazione « curvilinea »].

Calcolo con il raggio di curvatura, $\rho = 1/\kappa$ dove

$$\kappa = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+t^2)^{3/2}} \quad \text{e, infatti,} \quad a_N = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}$$

