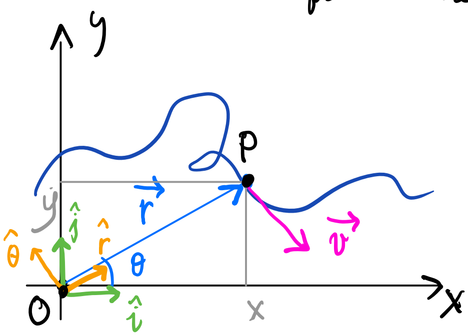
CINEMATICA del PUNTO 2D in COORDINATE POLARI

Studio alternativo del moto di un punto nel piano usando coordinate polari:



si introduce il sistema di versori "mobili" (che inseguono il punto P) $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ che sono esprimibili sulla "base" cartesiana $\hat{\imath}\hat{\jmath}$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\,\text{sen}\,\theta \\ \hat{\theta} &= -\hat{\imath}\,\text{sen}\,\theta + \hat{\jmath}\cos\theta \end{aligned}}$$

trasformazioni $(\hat{r},\hat{\theta}) \longleftrightarrow (\hat{\imath},\hat{\jmath})$

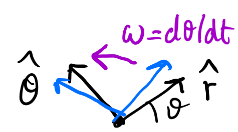
La posizione si esprime come $\vec{r} = r\,\hat{r}$

modulo (r), direzione ($\hat{r}$)

per cui la **velocità** è data da $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \hat{r}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$

lungo $\hat{r}$ c'è $\frac{dr}{dt}$ (velocità radiale - di avvicinamento/allontanamento all'origine)

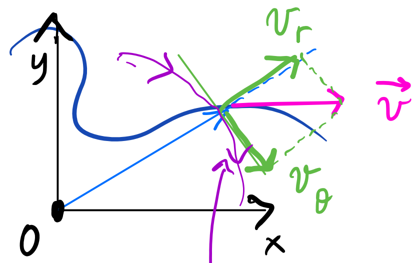
poi c'è da valutare $\frac{d\hat{r}}{dt}$: per Poisson $\frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{r} = \omega\hat{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$



Quindi $$\boxed{\vec{v} = \hat{r}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}}$$

questa è la velocità trasversa

ovvero $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$, $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$



che si scrive anche

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}$$

con $v_r = \frac{dr}{dt}$ e $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$

rotazione attorno a O con raggio r

NB se il moto è circolare $r = cost \Rightarrow v_r = 0$ e

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = r\omega\,\hat{\theta}$$ (unica velocità: periferica tangenziale)

Calcolo dell' $\boxed{\text{accelerazione}}$ a partire dalla

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

con $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$ $\Rightarrow$ (applicando le regole di derivazione)

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\theta}}{dt}.$$

si usa $\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$ (già vista) e $\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{\theta} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

ovvero $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$ dove

accel. radiale
accel. trasversa

$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta &= r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}}$$

NB $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 2v_r\omega$ è l'accelerazione di Coriolis.

NB Se il moto è circolare si ritrova qualcosa di più famigliare:

$r = cost \Rightarrow$ $a_r = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -r\omega^2$ [accelerazione centripeta*]

$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$ [accelerazione tangenziale]

* $\vec{a}_N = -\vec{a}_r$ [attenzione alla orientazione!]