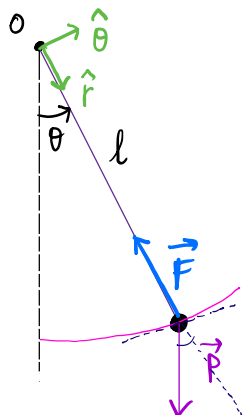




Il pendolo "semplice"

Studio dinamico di una massa puntiforme m trattenuta da una fune ideale di lunghezza l in assenza di qualunque forma di attrito.



Il sistema viene schematizzato in termini di due forze: il peso $\vec{P}$ della massa sospesa e la tensione $\vec{F}$ della fune che ha la direzione del vincolo.

L'equazione del moto è dunque

$$\vec{F}_{\text{TOT}} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Si adotta un sistema polare di coordinate (e versori) $(\hat{r}, \hat{\theta})$. Il sistema in concreto è completamente caratterizzato da un singolo grado di libertà cinematico, ovvero l'angolo θ individuato rispetto la direzione verticale.

Proiezione secondo $(\hat{r}, \hat{\theta})$ dell'equazione del moto.

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} \quad \text{con}$$

$$a_r = -l\omega^2, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a_\theta = l\alpha, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

← ottenute in precedenza.

$$\Rightarrow \begin{aligned} -ml\omega^2 &= (\vec{P} + \vec{F}) \cdot \hat{r} = P\cos\theta - F = mg\cos\theta - F \\ ml\frac{d\omega}{dt} &= (\vec{P} + \vec{F}) \cdot \hat{\theta} = -P\sin\theta = -mg\sin\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta; \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l}\cos\theta + \frac{1}{ml}F$$

NB: $\theta(t)$ [e dunque $\omega = d\theta/dt$] sono incognite; anche la tensione F è incognita.

L'equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$ è differenziale al II ordine nell'incognita $\theta(t)$, ma si può risolvere solo per piccole ampiezze della funzione $\theta(t)$ perché se vale

$$\sin\theta \approx \theta \quad (\text{per } \theta \text{ "piccolo"})$$

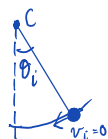
allora $\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l}\theta$

che è l'equazione dell'oscillatore armonico semplice nella variabile $\theta(t)$ con pulsazione $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ e dunque periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Soluzione per la legge oraria (piccole ampiezze)

$$\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad [\text{soluzione generale}]$$

NB1: i parametri A e ϕ si determinano utilizzando condizioni iniziali del moto appropriate all'istante iniziale (per esempio a $t=0$ il pendolo è lasciato libero da fermo a partire da un angolo iniziale θ_i).



La velocità del punto è tangenziale e si scrive $\vec{v} = v_{\theta} \hat{\theta} = l \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = l \omega \hat{\theta}$ che con la soluzione per piccoli angoli diventa

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow v = l \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi).$$

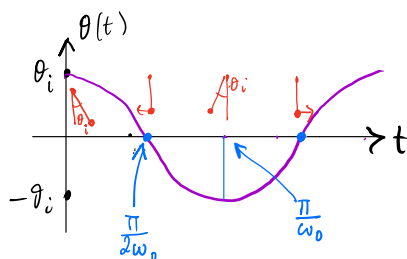
Sappiamo inoltre che $\theta_i = \theta(t=0) = A \sin \phi \Rightarrow \sin \phi = \theta_i / A$

$$\text{e } v(t=0) = l \omega_0 A \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2$$

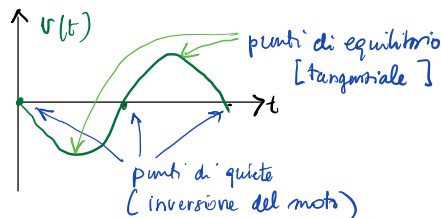
$$\Rightarrow 1 = \theta_i / A \Leftrightarrow A = \theta_i \text{ e, in definitiva}$$

$$\theta(t) = \theta_i \sin(\omega_0 t + \pi/2) = \theta_i \cos \omega_0 t$$

soluzione particolare



$$\text{NB2 } v(t) = -l \omega_0 \theta_i \sin \omega_0 t$$



NB3 significato dell'approssimazione « per piccoli angoli » : dipende dalle cifre significative.

Per esempio : $\theta = 4^\circ = 0,0698 \text{ rad}$; $\sin 4^\circ = 0,0698 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$ entro 3 cifre significative
 $\theta = 11^\circ = 0,1920 \text{ rad}$; $\sin 11^\circ = 0,1908 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$ entro 2 cifre significative ma non entro 3 cifre significative.

NB4 Determinazione della tensione della fune F in funzione della posizione θ del punto

A partire dall'equazione di moto radiale

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l} \cos \theta + \frac{1}{m \cdot l} F$$

si ottiene

$$F = m l \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + m g \cos \theta = m l \omega^2 + m g \cos \theta$$

Bisogna determinare la dipendenza della velocità angolare ω dalla posizione.

Si utilizza ancora l'equazione trasversale di moto, $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta$
 SARA' APPROSSIMAZIONI sull'ampiezza angolare.

moltiplicare per $d\theta$
entrambi i membri

$$\frac{d\omega}{dt} d\theta = -\frac{g}{l} \sin \theta d\theta$$

riscrivere

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l} \sin \theta d\theta$$

integrare fra la
posizione / velocità
nell'istante iniziale e
quella generica, cioè
fra θ_i, ω_i e θ, ω

$$\int_{\omega_i}^{\omega} \omega d\omega = \frac{\omega^2}{2} = -\frac{g}{l} \int_{\theta_i}^{\theta} \sin \theta d\theta$$

risultato
dell'integrale:

$$\omega^2 = \omega_i^2 + \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$\omega(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) + \omega_i^2}$$

per $\omega_i = 0$ (per esempio)
si sostituisce nella precedente
 $F(\theta) = m l \omega^2 + m g \cos \theta$

$$F(\theta) = m g (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

Si osserva che la tensione è sempre maggiore del carico «statico» $F_s = m g$.
 Nel punto più basso ($\theta = 0$) è $F_0 = m g (3 - 2 \cos \theta_0)$. Se, per esempio, $\theta_0 = \pi/2$,
 $F_0 = 3 m g$ [c'è «sovaccarico» per il moto circolare della massa].

NB5 Calcolo esplicito delle componenti radiale e trasversa dell'accelerazione:

$$a_r = -l \omega^2 = -2g (\cos \theta - \cos \theta_0);$$

$$a_\theta = l \frac{d\omega}{dt} = -g \sin \theta$$

caso notevoli:

per $\theta = \theta_0$ $a_r = 0$
 $a_\theta = -g \sin \theta_0 < 0$

per $\theta = 0$ $a_r = -2g (1 - \cos \theta_0) < 0$
 $a_\theta = 0$

