ATTRITO VISCOSO

È un tipo di attrito che nasce dall'interazione fra corpi solidi e sostanze fluide (gas o liquidi). La situazione è molto complessa e richiede tecniche di analisi molto sofisticate, soprattutto in presenza di fenomeni «turbolenti», ovvero caratterizzati da moti caotici del fluido che incontra corpi solidi in movimento relativo.

Qui ci si limita al modello ideale e relativamente semplice di attriti fluidi secondo la legge di Stokes* lineare, valida per moti di fluido "laminari" (non turbolenti) e con velocità di movimento relativamente basse. Secondo questo modello si scrive, per la forza di attrito viscoso, la relazione

* gli oggetti per Stokes dovrebbero avere forma sferica.

$$\boxed{\vec{F}_A = -k\vec{v}}$$

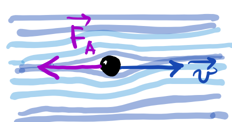
coefficiente di proporzionalità; k grande (piccolo) implica attrito grande (piccolo) a parità di velocità: dipende dal tipo di fluido e dalla forma dell'oggetto.

velocità del corpo nel fluido «viscoso»: $\vec{F}$ è sempre tale da opporsi al moto.

NB dimensioni di k

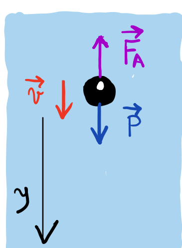
$[k] = [F]/[v] = \left[\frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}}\right] = [MT^{-1}]$ (kg/s nel SI)

regime turbolento



regime laminare

Si studia, come esempio, il moto di un corpo di massa m soggetto al suo peso e alla forza di Stokes di attrito viscoso dovuta all'interazione con un fluido. Si trascurano effetti dovuti alla spinta/forza idrostatica (di Archimede: c'è perché il corpo è immerso nel fluido ma non se ne tiene conto).



Equazione del moto per la massa di peso $\vec{P}$ nel fluido con coefficiente di attrito k:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_A + \vec{P} = m\vec{a}$$

ovvero $\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}}$

Proiezione sull'asse y verticale verso "il basso" $a = g - \beta v$ dove si pone $\beta = k/m$

[NB: β si misura nel SI in s^{-1}, è un inverso di un tempo].

L'equazione di moto da risolvere è un'equazione differenziale del I ordine nell'incognita velocità v: $\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \beta v}$

Si risolve per separazione di variabili. Si osserva che "intuitivamente", partendo con velocità nulla ($v=0$) agisce solo la forza peso che accelera la massa. Dunque nasce un attrito viscoso che tende a diminuire l'accelerazione (mentre la velocità continua ad aumentare). Dunque ci si aspetta una velocità «limite», v_{LIM}, quando l'accelerazione si annulla:

$$\boxed{a_{LIM} = 0 \Rightarrow v_{LIM} = g/\beta = mg/k}$$

NB $v_{LIM} \to \infty$ se $k \to 0$ (in assenza di attrito).

Soluzione dell'equazione di moto per separazione di variabili

$$\frac{dv}{dt} = g - \beta v \rightarrow \boxed{\frac{dv}{g-\beta v} = dt}$$

integrazione sull'intervallo $v = [v_0, v]$, $t = [0, t]$ $\rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{g-\beta v'} = t$

Cambio di variabile $z = g - \beta v' \Rightarrow -\frac{1}{\beta} dz = dv' \Rightarrow \int_{g-\beta v_0}^{g-\beta v} -\frac{dz/\beta}{z} = -\frac{1}{\beta}\int_{g-\beta v_0}^{g-\beta v} \frac{dz}{z} = t$

cambio estremi di integrazione

logaritmo naturale

Diventa $\ln \frac{g-\beta v}{g-\beta v_0} = -\beta t \rightarrow \frac{v - g/\beta}{v_0 - g/\beta} = \frac{v - v_{LIM}}{v_0 - v_{LIM}} = e^{-\beta t}$

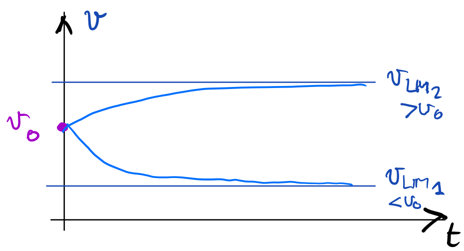
quindi $\boxed{v = v_{LIM} + (v_0 - v_{LIM})e^{-\beta t}}$

NB condizioni «al contorno» corrette:

$v(t=0) = v_0$

$v(t \to \infty) = v_{LIM}$

Andamento continuo della velocità del punto: si devono distinguere i due casi $v_0 > v_{LIM}$ e $v_0 < v_{LIM}$. Per esempio: oggetto "veloce" che entra in un mezzo molto viscoso ($v_0 > v_{LIM}$) oppure oggetto "lento" (o fermo all'inizio) che entra in un mezzo poco viscoso ($v_0 < v_{LIM}$)

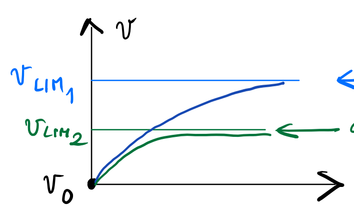


La velocità tende asintoticamente alla velocità limite a partire da v_0.

La rapidità di avvicinamento di $v(t)$ a v_{LIM} è regolata dal coefficiente $\beta = k/m$:

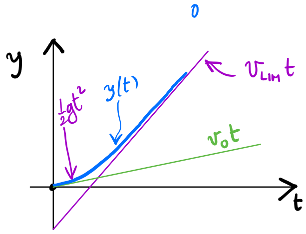
se c'è piccolo attrito $\rightarrow$ β è piccolo $\rightarrow$ avvicinamento lento $\rightarrow$ v_{LIM} grande

se c'è grande attrito $\rightarrow$ β è grande $\rightarrow$ avvicinamento brusco $\rightarrow$ v_{LIM} piccola



Si può ottenere la legge oraria della quota (posizione) del punto dalla $y = y_0 + \int_0^t v\,dt$

$$y = \int_0^t v\,dt = \int_0^t [v_{LIM} + (v_0 - v_{LIM})e^{-\beta t}]\,dt = \boxed{v_{LIM}t + \frac{1}{\beta}(v_0 - v_{LIM})(1 - e^{-\beta t})}$$



si vede la partenza «lineare» in t (per piccoli intervalli di tempo) con velocità v_0 e l'andamento per lunghi tempi ancora lineare con velocità "quasi costante" v_{LIM}

il grafico della accelerazione è un esponenziale che tende a zero.