LAVORO, POTENZA, ENERGIA

Si confrontano casi in cui una forza agisce su un punto materiale immobile in un riferimento inerziale e in cui il punto subisce uno spostamento.

Le due situazioni sono « intuitivamente » differenti e vanno in qualche modo inquadrate formalmente.

Si introduce una misura di una grandezza "in qualche modo" associata alla « fatica » o al « lavoro » spesi perché una forza sposti il (o agisca sul) punto materiale.

- → C'è lavoro non nullo quando la forza è applicata a un punto materiale in movimento (NB: il movimento può essere del tutto scorrelato dall'azione della forza).

Per uno spostamento infinitesimo $d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$ del punto soggetto alla forza $\vec{F}$ si definisce ...

LAVORO ELEMENTARE di $\vec{F}$ con PERCORSO $d\vec{r}$: $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_{\parallel} dr$

δW e non dW: ci sono buoni motivi per questa notazione

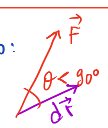
→ NB$_1$ il lavoro ha dimensioni $[W] = [F][dr] = [MLT^{-2}][L] = [ML^2T^{-2}]$ che nel SI si misurano in $kg\, m^2 s^{-2}$ detti joule (J):

Lavoro unitario (di 1 J) quando la forza unitaria è associata allo spostamento unitario.

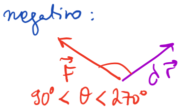
→ NB$_2$ nel sistema cgs il lavoro si misura a partire dalla combinazione
$$g \times cm^2/s^2 = 10^{-3} kg \times 10^{-4} m^2/s^2 \equiv 1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ joule}$$

→ NB$_3$ il lavoro è una grandezza SCALARE ed è espresso tramite un prodotto interno (scalare). Può quindi risultare positivo, negativo o nullo.

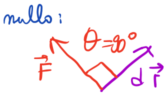
Lavoro positivo:



Lavoro negativo:



Lavoro nullo:

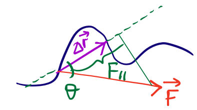


Per uno spostamento finito $\Delta\vec{r}$ si scrive quindi

$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_{\parallel} \Delta r$

$= F \Delta r \cos\theta$

componente di $\vec{F}$ nella direzione dello spostamento $\Delta\vec{r}$



NB$_4$ si può anche scrivere $\delta W = F_{\parallel} ds = F_{\parallel} v\, dt = (\vec{F} \cdot \vec{v})\, dt$

POTENZA MECCANICA

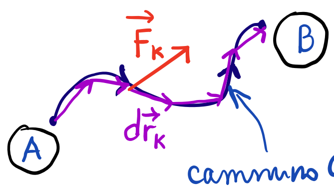
Misura del ritmo temporale di esecuzione del lavoro :

in media $\langle P \rangle = \dfrac{W}{\Delta t}$ istantanea $\boxed{P = \dfrac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

dimensioni della potenza $[P] = [W]/[T] = [M L^2 T^{-3}]$

nel SI la potenza si misura in $kg/m^2 s^3$ ovvero J/s chiamati $\boxed{\text{watt}, W.}$

Calcolo del lavoro associato a una forza $\vec{F}$ su un percorso (cammino, traiettoria) finito da A a B :



si scompone il cammino negli spostamenti infinitesimi $d\vec{r}_K$

si considera per ogni spostamento $d\vec{r}_K$ la forza $\vec{F}_K$ corrispondente

[nozione e idea di CAMPO di FORZA : l'insieme (continuo) di vettori $\vec{F}_K(\vec{r})$ nelle posizioni $\vec{r}$ dello spazio]

Lavoro totale del campo $\vec{F}$ lungo il cammino C_{AB} da A a B come somma dei "piccoli" lavori $W_K = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_K$

$$W_{AB} = \sum_K W_K$$

si passa al limite continuo della somma per infiniti spostamenti infinitesimi :

$$\boxed{W_{AB} = \int_{C_{AB}} \delta W = \int_{C_{AB}} \vec{F} \cdot \delta\vec{r}}$$

NB$_1$ L'integrale è detto « curvilineo » o integrale di cammino/di linea di $\vec{F}$ lungo C : non è necessariamente un integrale di misura di un'area perché l'integrando dipende non solo dagli estremi di integrazione A e B ma anche dalla forma del percorso che congiunge A e B .

NB$_2$ Si può anche scrivere $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\hat{u}_{\parallel} ds) = F_{\parallel} ds$

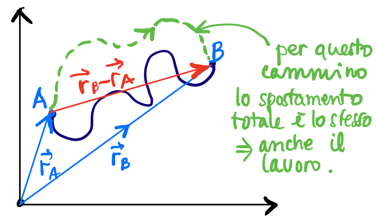
componente della forza tangente al cammino

per cui $\boxed{W_{AB} = \int_{C_{AB}} F_{\parallel} ds}$

NB 3 Se il campo di forze è "uniforme", cioè $\vec{F}$ = costante ovunque (per esempio: forza di gravità al suolo) allora, per qualunque percorso C_{AB}

se $\vec{F} = \vec{cost}$

$$\boxed{W_{AB} = \int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_{C_{AB}} d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A)}$$



ovvero lavoro = $\overrightarrow{\text{Forza}}$ • $\overrightarrow{\text{Spostamento}}$ TOTALE

NB 4 In presenza di più forze $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N)$ concorrenti sul punto, il lavoro associato a un cammino C_{AB} è calcolato a partire dal lavoro della forza totale (risultante vettoriale) delle singole forze:

→ per ogni forza il lavoro è $W_{AB_K} = \int_{C_{AB}} \vec{F}_K \cdot d\vec{r}$

→ forza totale $\vec{F}_{TOT} = \sum_1^N{}_K \vec{F}_K$

→ lavoro totale $W_{AB,TOT} = \sum_1^N{}_K W_{AB,K} = \sum_1^N{}_K \int_{C_{AB\,K}} \vec{F}_K\cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB,K}} \sum_1^N{}_K \vec{F}_K \cdot d\vec{r}$

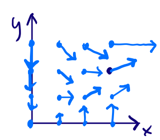
$$\Rightarrow \boxed{W_{AB,TOT} = \int_{C_{AB}} \vec{F}_{TOT}\cdot d\vec{r}}$$

NOTA: questo risultato non vale per corpi estesi perché punti diversi percorrono traiettorie differenti. Vale solo per i PUNTI MATERIALI.

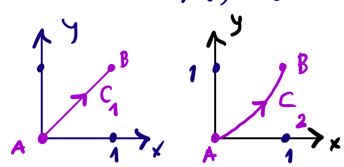
• → Perché W dovrebbe dipendere dal cammino C e non solo dagli estremi A, B ? Che tipo di integrale è il lavoro? Come si calcola?

Esempio di campo di forza (in 2 dimensioni) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = xy\,\hat{i} + (x-y)\,\hat{j}$

[data la posizione $\vec{r} = (x,y) \Rightarrow$ si calcolano i vettori $\vec{F} = (F_x, F_y) = (xy, x-y)$]



Si deve descrivere il cammino: due esempi C_1 e C_2 con eguali punti di partenza $A\,(0,0)$ e arrivo $B\,(1,1)$



Cammino C_1: $y = x$ (segmento di retta); C_2 : $y = x^2$ (arco di parabola).

in forma parametrica $C_1: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} t \in [0,1]$; $C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} t \in [0,1]$

Calcolo di W_{AB} a partire da $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy$ con $\begin{matrix} F_x = xy \\ F_y = x - y \end{matrix}$ e $\begin{cases} dx = dt \\ dy = dt \end{cases}$ su C_1 e $\begin{cases} dx = dt \\ dy = 2t\,dt \end{cases}$ su C_2

$W_{AB}(C_1) = \int_0^1 [\underbrace{t^2}_{F_x} \cdot \underbrace{dt}_{dx} + \underbrace{0}_{F_y} \cdot \underbrace{dt}_{dy}] = 1/3$; $W_{AB}(C_2) = \int_0^1 [\underbrace{t^3}_{F_x} \cdot \underbrace{dt}_{dx} + \underbrace{(t-t^2)}_{F_y}\underbrace{2t\,dt}_{dy}] = \int_0^1 (-t^3 + 2t^2)\,dt = 5/12$

$\Rightarrow W_{AB}(C_1) \neq W_{AB}(C_2)$