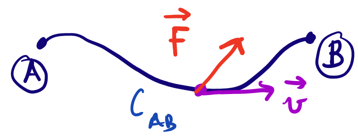
TEOREMA LAVORO-ENERGIA CINETICA

Si scopre che il lavoro meccanico ha una proprietà matematica molto utile. Per scoprirla è sufficiente considerare il caso di un punto materiale che percorre un dato cammino ed è soggetto all'azione di una forza risultante qualsiasi $\vec{F}$.



Si calcola il lavoro associato alla forza $\vec{F}$ su questo cammino:

$$W_{AB} = \int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB}} m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB}} m\,\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

in cui si usa la relazione $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Si osserva che $d(v^2) = d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\,\vec{v}\cdot d\vec{v} \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}\,d(v^2)$

[da proprietà standard del calcolo differenziale e del prodotto scalare]

per cui

$$W_{AB} = \int_{C_{AB}} \frac{1}{2}\,m\,d(v^2) = \frac{1}{2}\,m\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

differenziale di v^2

a prescindere dal percorso C_{AB} perché si integra un differenziale (esatto, di v^2).

Si introduce la grandezza $\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2}$, energia CINETICA della massa m con velocità v

e si ottiene quindi, in termini di lavoro meccanico, che

$$\boxed{W_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K}$$

> Il lavoro sulla massa m a opera della forza risultante $\vec{F}$ è sempre eguale alla VARIAZIONE di ENERGIA CINETICA del corpo

▶ (Teorema «lavoro-energia» o «delle forze vive»; NB: è un teorema ◀

• ➜ Se si sa calcolare il lavoro fatto dalla forza → si ottiene la VARIAZIONE di energia cinetica → la variazione di velocità!

▶ NB1 Si può anche scrivere $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m} = p^2/2m$ quantità di moto

▶ NB2 L'energia cinetica dimensionalmente è un lavoro e si misura in joule nel SI.

Si confrontino le due relazioni

$$\int \vec{F}\, dt = \Delta \vec{p} = \vec{J} \qquad \qquad \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_K = W$$

la forza agente nel tempo provoca variazione di quantità di moto (l'impulso $\vec{J}$)

la forza agente nello spazio provoca variazione della energia cinetica (il lavoro W)

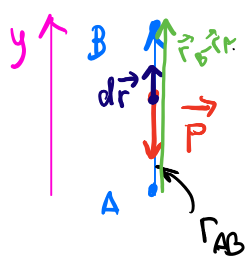
SONO INTEGRALI MOLTO DIFFERENTI!

A sinistra ci sono grandezze VETTORIALI, a destra scalari

- → Qualche esempio

▶ Moto e lavoro in un campo uniforme di gravità [lavoro della forza peso]

Salita di una massa (con traiettoria verticale) dalla quota A alla quota B



Lavoro elementare $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg\, ds < 0$

lavoro totale $W_{AB} = \int_{C_{AB}} \delta W = \vec{P} \cdot \int d\vec{r} = \vec{P} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = -mg(y_B - y_A) < 0$

teorema lavoro-energia: $W_{AB} = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$

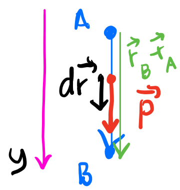
⇒ essendo $W_{AB} < 0$ è anche $\Delta E_K < 0$, cioè l'energia cinetica diminuisce:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + W_{AB} = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(y_A - y_B) < \frac{1}{2} m v_A^2$$

Si può anche scrivere $v_B^2 = v_A^2 + 2g(y_A - y_B) = v_A^2 - 2g(y_B - y_A)$

▶ Preso per esempio $y_A = 0$, $y_B = h$, $v_A = v_0$ è $v^2(h) = v_0^2 - 2gh$, come già ricavato dall'equazione del moto con accelerazione $\vec{g}$.

Il caso della discesa è del tutto analogo:



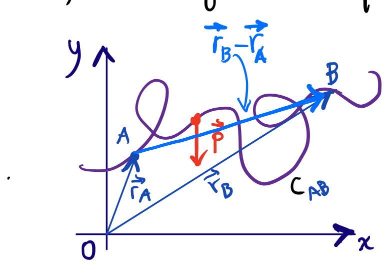
ora $\quad \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot d\vec{r} = mg\,dy > 0$ e

$$W_{AB} = \vec{P} \cdot \int_{C_{AB}} d\vec{r} = \vec{P} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = mg(y_B - y_A) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(y_B - y_A) \quad \text{o} \quad v_B^2 = v_A^2 + 2g(y_B - y_A) > v_A^2$$

se $v_A = 0$, $y_A = 0 \Rightarrow v_B^2 = 2 g y_B$.

▶ Validità generale del calcolo del lavoro in campo uniforme di gravità, come già anticipato:

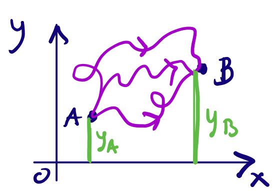


$$W_{AB} = \int_{C_{AB}} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) =$$
$$= -mg\,(y_B - y_A) =$$
$$= mg\,(y_A - y_B)$$
$$= -mg\Delta y \, .$$

NB Conta solo la differenza di quota perché la forza peso $\vec{P}$ non lavora per spostamenti lungo x :

$$\vec{P} \cdot \vec{r} = -P\hat{j} \cdot (x\hat{i} + y\hat{j}) = -P \cdot y$$

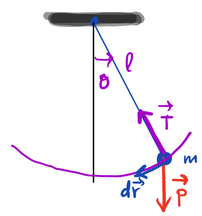
▶ conseguenza importante (già anticipata)



lungo i cammini indicati il lavoro eseguito dalla forza peso è sempre lo stesso ed è pari a

$$W_{AB} = -mg(y_B - y_A) = +mg(y_A - y_B)$$

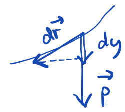
Il caso del pendolo



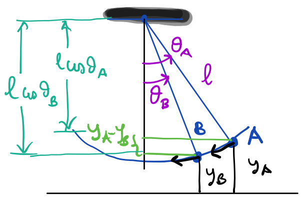
gli spostamenti elementari $d\vec{r}$ sono tangenti alla traiettoria per cui

(1) il lavoro associato a $\vec{T}$ è nullo, $\vec{T}\cdot d\vec{r} = 0$

(2) il lavoro associato a $\vec{P}$ è $\vec{P}\cdot d\vec{r} = mg\,dy$



Durante la discesa il lavoro di $\vec{P}$ è positivo per cui l'energia cinetica aumenta:



$W_{AB} = mg(y_A - y_B) > 0$ $\quad y_A - y_B = \ell(\cos\vartheta_B - \cos\vartheta_A)$

$\Delta E_K = E_{KB} - E_{KA} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{AB} =$

$= mg\ell(\cos\vartheta_B - \cos\vartheta_A) \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2g\ell(\cos\vartheta_B - \cos\vartheta_A).$

per esempio, se $v_A = 0$, $\vartheta_A = \vartheta_0$, per $\vartheta_B = 0$ (verticale) è

$v_B^2 = 2g\ell(1-\cos\vartheta_0)$ [già ricavata con l'equazione del moto]

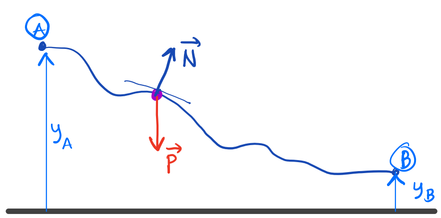
NB L'espressione che lega la variazione di velocità del pendolo con la perdita di quota h (o con il suo guadagno in caso di salita),

$$v_f^2 = v_i^2 \pm 2gh$$

è la stessa che si ottiene per la caduta (o salita) verticale di un corpo puntiforme.

Come già sottolineato, questo risultato è valido a prescindere dalla forma della traiettoria: **CONTA SOLO LA VARIAZIONE NETTA DI QUOTA.**

moto lungo un profilo liscio con forma qualunque

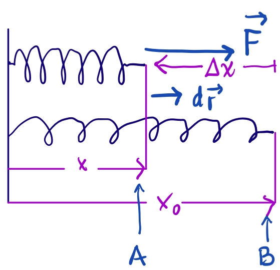


Il profilo è descritto dalla reazione vincolare $\vec{N}$ perpendicolare alla tangente locale alla curva perché la rotaia è senza attrito

$\Rightarrow$ lavora solo $\vec{P}$ $\Rightarrow$ vale quanto già descritto in precedenza:

$$v_B^2 = v_A^2 + \frac{2W_{AB}}{m} = v_A^2 + 2g(y_A - y_B)$$

Un caso di forza non costante: legge di Hooke, $\vec{F} = -k\vec{r}$



$\Delta x = x - x_0$

Molla compressa di Δx (<0) a partire dalla lunghezza di riposo x_0. $\quad F = -k(x-x_0) > 0$ (verso destra)

Lavoro $W_{AB} = \int_{AB} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -k\int_{x_A}^{x_B}(x-x_0)\,dx =$

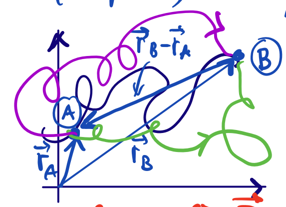
$= -k\int_{x}^{x_0}(x-x_0)\,dx = -k\int_{x-x_0}^{0} z\,dz = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \Delta E_{K_{A,B}} \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + \frac{k}{m}\Delta x^2$

CAMPI DI FORZE CONSERVATIVI : IL POTENZIALE

- Ci si interessa ai casi di (campi di) forze per i/le quali il lavoro associato dipende solo dagli estremi del cammino eseguito e non dalla sua forma.
- Si è visto che in generale al variare del percorso svolto il lavoro di una data forza cambia.
- Il calcolo del lavoro conduce immediatamente al valore delle variazioni cinematiche (di velocità) del corpo in esame grazie al teorema energia - lavoro.
- Ecco perché se il lavoro non dipende dal percorso ma solo dai suoi estremi si è al cospetto di una situazione interessante.

Si è visto l'esempio di un campo di forze costanti (il peso) nel quale ciò avviene:

$$W_{AB} = \int_{C_{AB}} \vec{P}\cdot d\vec{r} = \vec{P}\cdot\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{r} = \vec{P}\cdot(\vec{r}_B-\vec{r}_A)$$



qui quello che conta è solo il vettore spostamento totale perché $\vec{P} = \text{cost}$.

In generale si studiano le forze per le quali risulta

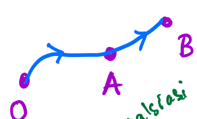
$$W_{AB} = V(A,B) \quad \leftarrow \text{funzione solo degli estremi.}$$

Se questo è il caso allora si può scrivere

$$\boxed{W_{AB} = V(B) - V(A) = \Delta V_{AB}}$$

NB: già ottenuto infatti se $\vec{F} = \text{cost}$, come nel caso della forza peso!

«Dimostrazione»:



$$W_{OA} = V(O,A)$$
$$W_{OB} = V(O,B) = W_{OA} + W_{AB}$$
$$\Rightarrow W_{AB} = W_{OB} - W_{OA} = V(O,B) - V(O,A)$$ con O qualsiasi

$\Rightarrow$ si pone $V(P) = V(O,P)$ e dunque è vero che $W_{AB} = V(B) - V(A)$.

La funzione «del posto» $V(P)$ si chiama POTENZIALE della forza ed esiste (è definibile) SOLAMENTE se l'integrale di cammino $W_{AB} = \int_{C_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ dipende solo dagli estremi.

Per esempio, nel caso della forza peso si è visto che $W_{AB} = \vec{P}\cdot\vec{r}_B - \vec{P}\cdot\vec{r}_A$ e dunque

$$V(\vec{r}) = \vec{P}\cdot\vec{r} \quad \text{(a meno di una costante additiva arbitraria).}$$

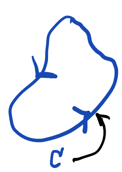
I campi di forze che conducono a un lavoro che dipende dagli estremi di un percorso ma non dal percorso stesso sono detti campi di forze CONSERVATIVI

- → Si può formulare un primo "criterio di conservatività":

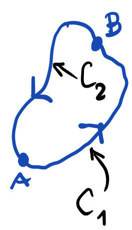
  è soddisfatto se esiste una funzione scalare del posto $V(\vec{r})$ tale che il lavoro associato al campo di forze si scrive come differenza di valori della funzione $V(\vec{r})$,

$$\boxed{W_{AB} = \Delta V_{AB}}$$

- → Si può formulare anche un secondo criterio, a partire dal caso del lavoro associato a un percorso che si chiude su sé stesso:



si spezza C in due parti



e si calcola il lavoro su C:

$$W_\Gamma = W_{C_1(AB)} + W_{C_2(BA)}$$

però $W_{C_2(BA)} = -W_{C_2(AB)}$

(inversione del cammino su C_2)

quindi $W_C = \underbrace{W_{C_1(AB)} - W_{C_2(AB)}}_{\text{sono cammini differenti con gli stessi estremi}}$ → se le forze sono conservative $W_{C_1(AB)} = W_{C_2(AB)}$

⇒ I campi di forze conservativi sono tali che il lavoro calcolato lungo un qualunque percorso chiuso è NULLO

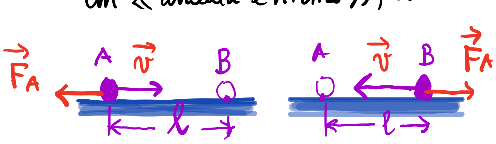
o, equivalentemente

La «circuitazione» di un campo di forze conservativo è nulla:

$$\boxed{W\left(\begin{smallmatrix}\text{qualunque}\\ \text{percorso chiuso}\end{smallmatrix}\right) = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Delta V = 0}$$

NB: l'integrale di linea lungo un percorso chiuso, $\oint$, è la circuitazione

NB2 Calcolo del lavoro per la forza di attrito lungo un «andata e ritorno», cioè un percorso chiuso:



$W_{AB} = -\mu_c m g \ell$
$W_{BA} = -\mu_c m g \ell$
$\Rightarrow W_{TOT} = -2\mu_c m g \ell$
$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$
⇒ L'attrito non è conservativo! (non ha un potenziale)