CAMPI DI FORZE CONSERVATIVI: L'ENERGIA POTENZIALE

Si introduce, esclusivamente e ovviamente solo per forze conservative, la funzione del posto

$$\text{ENERGIA POTENZIALE} \quad U = U(\vec{r}) = -V(\vec{r})$$

energia potenziale U e potenziale V sono una l'opposto dell'altro.

Il criterio di conservatività diventa allora

$$W_{AB} = \Delta V_{AB} = -(U_B - U_A) = -\Delta U_{AB}$$

Ovviamente continua a valere il teorema lavoro-energia (è generale) per cui

$$\underbrace{W_{AB} = \Delta E_K}_{\text{sempre}} \underbrace{= -\Delta U_{AB}}_{\text{forze conservative}} \Rightarrow \Delta E_K + \Delta U_{AB} = 0$$

Si introduce l'ENERGIA (MECCANICA) TOTALE

$$E = E_K + U \Rightarrow \Delta E_{AB} = \Delta E_K + \Delta U_{AB} = 0$$

$$\Rightarrow E = \text{cost}$$

Ovvero in presenza di forze CONSERVATIVE la grandezza E, somma di energia cinetica (di movimento) e potenziale (posizionale) è conservata (costante).

Questa è la formulazione più semplice del PRINCIPIO di CONSERVAZIONE dell'energia in un sistema meccanico costituito da un punto materiale.

NB: le varie forme di energia (cinetica, potenziale, totale) sono tutte con le medesime dimensioni ($\Rightarrow$ unità di misura) del lavoro.

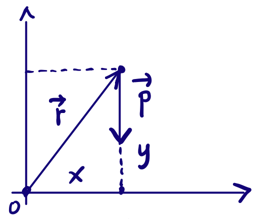
La conservazione dell'energia va interpretata come uno strumento potente per determinare certi aspetti dell'evoluzione di un sistema fisico soggetto all'azione di forze di natura conservativa.

Si può dire che se $E = U + E_K = \text{cost}$, durante il moto l'energia cinetica varia a spese dell'energia potenziale, che altro non è se non l'opposto del lavoro eseguito. Se U aumenta (il lavoro è negativo) allora l'energia cinetica (la velocità) diminuisce [è stata sottratta energia di moto dal «serbatoio» dell'energia totale) e viceversa.

- **esempio: forza peso**

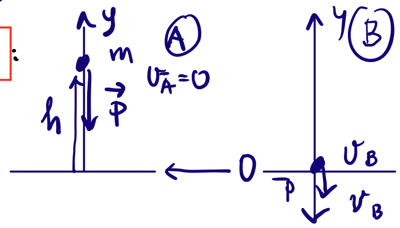
Si è visto che $V(\vec{r}) = \vec{P}\cdot\vec{r} \Rightarrow U(\vec{r}) = -\vec{P}\cdot\vec{r}$

$\Rightarrow U = U(y) = +mgy$ (a meno di una costante additiva arbitraria)



Caduta di una massa sotto l'azione del suo peso:

a partire dalla quota h dal suolo, preso come zero di riferimento si ha:



(A) $y=h,\ v_A=0 \Rightarrow U_A = mgh,\ E_{K_A}=0$

(B) $y=0,\ v_B\neq 0 \Rightarrow U_B=0,\ E_{K_B}=\frac{1}{2}mv_B^2$

con $E = E_K + U = \text{cost} \Leftrightarrow E_A = E_B \Leftrightarrow E_{K_A}+U_A = E_{K_B}+U_B \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$

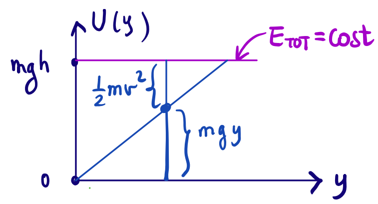
$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$ [NB non si è passati attraverso la risoluzione temporale dell'equazione del moto!]

Vale per qualunque posizione della massa: $mgy + \frac{1}{2}mv^2 = \text{cost}$

la costante è fissata (a priori, di solito) con certe condizioni iniziali.

Nel caso precedente:

$$\Rightarrow \quad mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgh = E_{TOT}$$
$$v^2 = 2g(h-y)$$

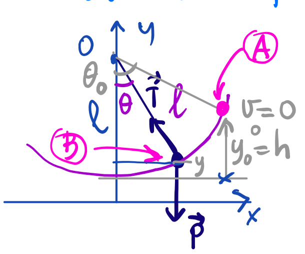


NB: se y aumenta $\Rightarrow E_K$ cala (e viceversa).

pendolo semplice

sulla massa, oltre al peso, che è conservativo, agisce la tensione della fune che è però costantemente perpendicolare agli spostamenti della massa, per cui non influisce nel conto.

Conta solo il peso.



L'energia potenziale è ancora quella del peso:

$U = U(y) = mgy$ anche se qui ci sono spostamenti in direzione x questi non producono lavoro → non fanno variare U.

In funzione dell'angolo θ, preso come riferimento per y il punto più basso del pendolo, è

$$y = \ell(1-\cos\theta) \Rightarrow U(y) = mg\ell(1-\cos\theta)$$

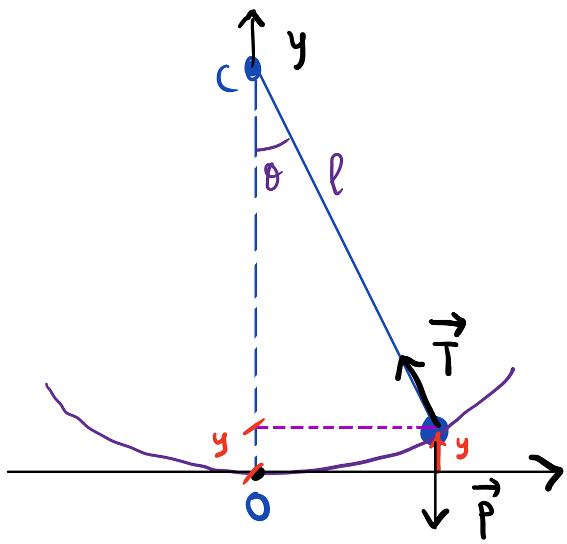
Conservazione (a partire dal punto (A) con quota y_0, angolo θ_0, velocità nulla $v_0 = v_A = 0$):

$E_{K_A} = 0$ | $E_{K_B} = \frac{1}{2}mv_B^2$ | $E_{K_A}+U_A = E_{K_B}+U_B = \text{cost}$

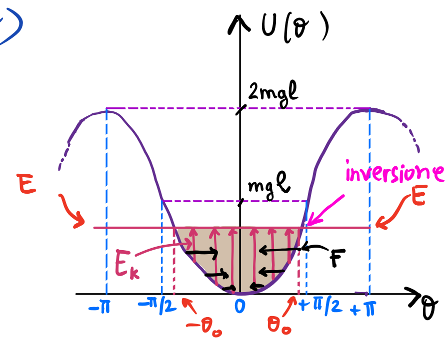
$U_A = mgy_0 = mg\ell(1-\cos\theta_0)$ | $U_B = mg\ell(1-\cos\theta)$ | $E_{K_B} = mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_B^2$

$$\Rightarrow v_B^2 = 2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Esempio di utilizzo della curva U nel caso del pendolo semplice.



In funzione di θ è anche $U = U(\theta) = mg\ell(1-\cos\theta)$ che va disegnata per lo studio energetico:



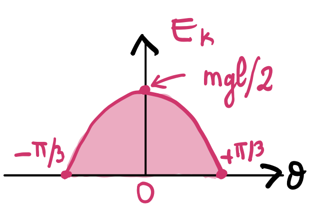
si deve poi fissare l'energia totale a partire dalle condizioni iniziali del moto.

Per esempio la massa è ferma ($v=0$) nel punto di coordinata angolare $\theta = \theta_0$.
In $\theta=\theta_0$ c'è solo energia potenziale e il moto è limitato nell'intervallo $[-\vartheta_0, \vartheta_0]$. Gli estremi sono punti di quiete (di inversione).

Si determina di fatto la curva dell'energia cinetica a partire dalla

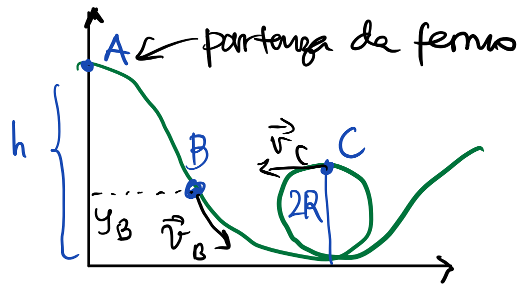
$$E = E_K + U \quad \Rightarrow \quad E_K = E - U = mg\ell(1-\cos\vartheta_0) - mg\ell(1-\cos\vartheta) = mg\ell(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)$$

Per esempio con $\vartheta_0 = \pi/3$ è $E = mg\ell\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) = mg\ell/2$ e $E_K = mg\ell(\cos\vartheta - 1/2)$

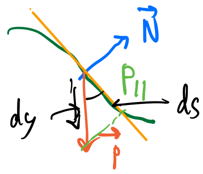


NB: verificare che se in θ_0 la velocità non è nulla, allora i punti di inversione sono a valori maggiori (in assoluto) di θ_0.

profilo curvilineo liscio



Si tratta il problema come nel caso unidimensionale: la forza del vincolo non lavora; la componente del peso parallela agli spostamenti invece lavora:



$$\delta W = \vec{P}\cdot d\vec{r} = P_{\parallel}\, ds = mg\, dy$$

perché $P_{\parallel} = mg \sin\theta$

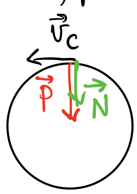
e $dy = ds \sin\theta$

Conservazione dell'energia:

$$E_A = E_{kA} + U_A = E_{kB} + U_B = E_{kC} + U_C = \dots$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg\cdot 2R$$

Quindi, per esempio, $v_B^2 = 2g(h-y_B)$; $v_C^2 = 2g(h-2R)$



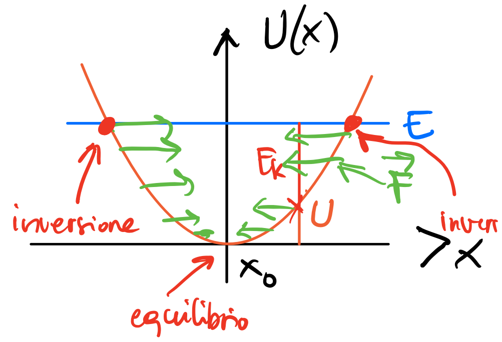
da un punto di vista della dinamica

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} \Rightarrow N = \frac{mv_C^2}{R} - mg \geq 0$$

se $v_C^2 \geq gR \Rightarrow h \geq 5R/2$ per evitare il distacco dal profilo.

Energia potenziale elastica

$$V = -\frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$



Si fissa l'energia totale con le condizioni iniziali:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2.$$

Per esempio per $x=x_0$ è $v=v_0$, $E = \frac{1}{2}mv_0^2$.

Si osserva (anche in generale) che $F\,dx = -dU \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx}$, ovvero la forza (in una singola coordinata) è opposta alla pendenza di $U(x)$.

NB: dalle $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = E$, derivando si ha $0 = \frac{dE}{dt} = m\ddot{x} + k(x-x_0)$, ovvero l'equazione del moto.

Notare anche che la « buca armonica » è approssimazione per qualunque curva di energia potenziale attorno a un minimo. Questo grazie allo sviluppo in serie di Taylor:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \cdots}$$

che, nel punto supposto di minimo x_0 (ovvero tale che $f'(x_0)=0$) diventa

$$\boxed{f(x) \simeq f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0)}$$

che è una parabola.

Nel caso del pendolo semplice si ha che

$$U(\theta) = mg\ell\,(1 - \cos\theta) \simeq mg\ell\,\frac{\theta^2}{2}$$

perché si usa la serie troncata $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ per « piccoli » angoli attorno a $\theta_0 = 0$.

Quindi $U(\theta)$ è approssimativamente armonica per cui si ottiene il periodo del pendolo (per piccoli angoli)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

dove ora $k = mg/\ell \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ (come già ottenuto).