COLLEGAMENTO fra ENERGIA POTENZIALE e CAMPO di FORZE: il GRADIENTE

Si vuole formalizzare la connessione fra il potenziale / energia potenziale e il campo di forze associato.

Ingredienti:
- lavoro elementare $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- definizione di differenziale esatto di una funzione $V(x,y,z)$
- condizione di conservatività

▶ Lavoro elementare $\boxed{\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz}$ (*)
(è il prodotto scalare utilizzando le componenti cartesiane dei vettori $\vec{F}$ e $d\vec{r}$)

▶ differenziale esatto della funzione (campo) scalare $V(\vec{r}) = V(x,y,z)$,

a partire dal caso in una variabile, $df = f'(x)\,dx = \left(\frac{df}{dx}\right)dx$

$$\boxed{dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz} \quad (**)$$

NB: si usano le derivate «parziali», $\frac{\partial V}{\partial x}$ misura la variazione rispetto x con y, z costanti.

▶ se il campo $\vec{F}$ è conservativo allora

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta V \quad \Leftrightarrow \quad \delta W = dV}$$

NB: in questo modo infatti $\int \delta W = \int dV$ ovvero $W = \Delta V$

Si eguagliano la (*) e la (**) per cui, se $\vec{F}$ è conservativo,

$$\boxed{F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}}$$

ovvero il campo di forze $\vec{F}$ è dato anche dal vettore

$$\boxed{\vec{F} = \hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z} = \text{grad } V = \vec{\nabla} V}$$

NB: essendo per definizione $U = -V$ si può anche scrivere $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

Se un campo di forze è conservativo, esso è dato dal GRADIENTE del suo potenziale.
Il gradiente è un vettore con modulo pari alla massima pendenza in modulo di V e con direzione eguale a quella della massima pendenza.

Si può usare l'idea di $\boxed{\text{DERIVATA DIREZIONALE } D_{\hat{u}}}$ del campo scalare $f(x,y,z)$ nella direzione $\hat{u}$:

$$D_{\hat{u}} f = (\vec{\nabla} f) \cdot \hat{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_x + \frac{\partial f}{\partial y}u_y + \frac{\partial f}{\partial z}u_z$$

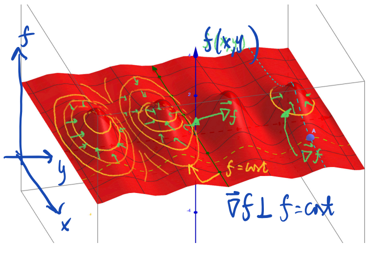
▶ [per esempio: lungo $\hat{\imath}$ è $\hat{u} = (1,0,0)$ e $D_{\hat{\imath}} f = \frac{\partial f}{\partial x}$, infatti]

è anche $D_{\hat{u}} f = |\vec{\nabla} f| \cos\theta = \max = |\vec{\nabla} f|$ se $\theta = 0$

[θ è l'angolo fra $\vec{\nabla} f$ e $\hat{u}$ ed è nullo quando la derivata direzionale è massima]

Inoltre per spostamenti perpendicolari a $\vec{\nabla} f$ ($\theta = \pi/2$) si ottiene $D_{\hat{u}} f = 0$ ovvero $f = \text{cost}$.

Si può (deve) pensare a «curve di livello» con $V = \text{cost}$ (lungo le quali il lavoro è nullo) e direzioni di massima pendenza con lavoro massimo



CURVA dell' ENERGIA

Si formalizza la relazione $E = U + E_K = cost$.
E' particolarmente utile anche fissare le idee sul significato in pratica della relazione fra campo di forze ed energia potenziale U, cioè la

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, U$$

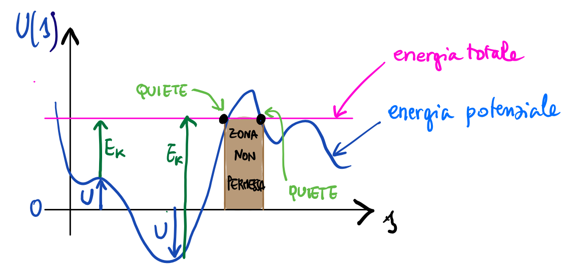
- Nel sistema di coordinate cartesiane con direzioni $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ si ha la già vista

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}}$$

- Nel caso di un problema a un singolo grado di libertà (per esempio: la coordinata curvilinea s), si ha che

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, U = -\frac{dU}{ds}\hat{s}}$$

(nella direzione rappresentativa di $\vec{F}(s)$)



$E = U(s) + E_K$

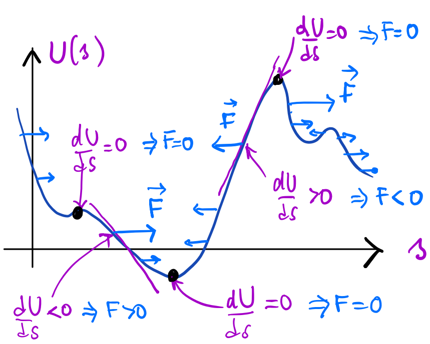
$\Downarrow$

$E_K = E - U(s)$

se l'energia potenziale è maggiore di quella totale, il moto della massa NON è permesso: si definiscono zone «proibite» se $U > E$

Se l'energia potenziale è uguale a quella totale si hanno punti di quiete / inversione.

La forza dalla curva energetica: si utilizza la $F_s = -\partial U / \partial s$



I punti di min/max sono di equilibrio ($F = 0$).

Si possono avere punti di

equilibrio STABILE (MIN di U)	equilibrio INSTABILE (MAX di U)