Energia potenziale gravitazionale secondo Newton

A partire dalla $\vec{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{r}$

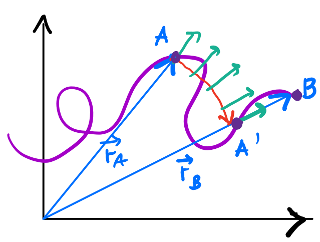
in coordinate polari, essendo $d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta}$, si ha che

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta \quad \text{con } F_\theta = 0 \quad \Rightarrow \delta W = F\,dr = -\frac{GmM}{r^2}\,dr = -dU,$$

cioè $\delta W = dU$ è un differenziale esatto (integrabile e indipendente dal percorso) per cui si ha per l'energia potenziale newtoniana l'espressione

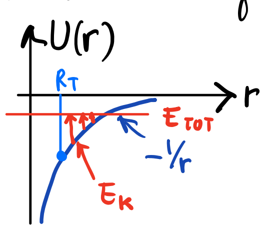
$$U(r) = GmM\int\frac{dr}{r^2} = -\frac{GmM}{r} + \text{cost}$$

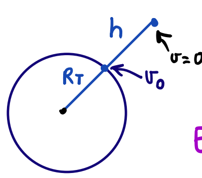
- $\underline{NB_1}$ si pone di solito $U(r=\infty)=0$ per cui $\text{cost}=0$ e $U(r) = -GmM/r$.
- $\underline{NB_2}$ che $\vec{F}$ sia conservativa lo si può intuire anche dalla sua centralità



Per andare da A a B si può passare per A' <u>senza lavoro</u> (linea equipotenziale) e poi andare da A' a B.

Curva dell'energia newtoniana e lancio di una massa con velocità v_0 dalla superficie della terra





$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{R_T}$$

$$E_f = -\frac{GmM}{(R_T+h)}$$

dalla $E_i = E_f = \text{cost}$ si calcola

$$h = \frac{R_T}{1-\frac{2GM}{v_0^2R_T}} = \frac{v_0^2}{2g}\,\frac{1}{1-\frac{v_0^2}{2gR_T}} \longrightarrow \infty \quad \text{se } v_0 \to \sqrt{2gR_T} = v_F$$

(velocità di fuga)

$\underline{NB_3}$:

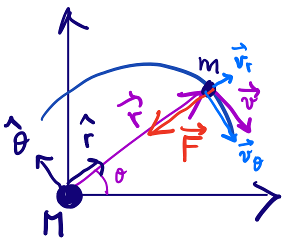
se $v_0 \ll \sqrt{2gR_T} = v_F$ ($\simeq 11$ km/s per la Terra)

allora $h \approx \dfrac{v_0^2}{2g}$

come si ottiene nel caso della forza peso costante.

Energia potenziale gravitazionale e orbite planetarie

Si vuole tenere conto non solo della componente radiale del moto ma anche di quella angolare da un punto di vista energetico.



Scomposizione polare di $\vec{v}$: $\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{r} + r\omega\,\hat{\theta}$

$\Rightarrow \; v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2$

$\Rightarrow$ energia cinetica $E_K = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{\text{contributo radiale}} + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\omega^2}_{\text{contributo angolare}}$

Energia totale nel campo di gravitazione newtoniana:

$$\boxed{E = E_K + U = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \frac{GmM}{r}}$$

Riscrittura del termine cinetico rotazionale utilizzando il momento angolare:

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v} = m\,\vec{r}\times(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}) = mr^2\omega\,\hat{k}$ ← versore perpendicolare al piano di moto.

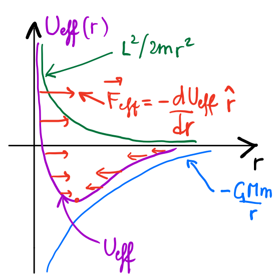
Siccome $\vec{F}$ è centrale $\Rightarrow$ $\vec{L} = \text{cost}$ $\Rightarrow$ $mr^2\omega = L = \text{cost}$ $\Rightarrow$ $\omega = L/mr^2$

per cui $\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{L^2}{2mr^2}$. Siccome $L = \text{cost} \Rightarrow \frac{L^2}{2mr^2}$ dipende solo da $\frac{1}{r^2}$.

si scrive quindi $\boxed{E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{eff}}$

dove si introduce **l'energia potenziale efficace** $\boxed{U_{eff}(r) = L^2/2mr^2 - GmM/r}$

$U_{eff}(r)$ descrive l'energia potenziale che tiene conto – se c'è – della componente angolare.
Lo studio energetico del moto radiale va ora ricondotto alla curva U_{eff}:

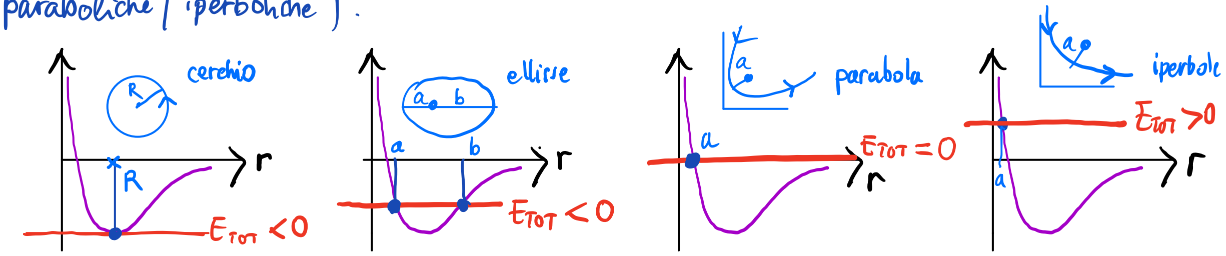


si può introdurre una forza radiale efficace data da

$\vec{F}_{eff} = -\frac{dU_{eff}}{dr}\hat{r} \Rightarrow F_{eff} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{GmM}{r^2} = \underbrace{mr\omega^2}_{\text{centrifuga}} - \underbrace{\frac{GmM}{r^2}}_{\text{gravitazionale radiale attrattiva}}$

il termine energetico $\frac{L^2}{2mr^2}$ dà la forza centrifuga $mr\omega^2$ perché di fatto si sta trattando il moto in un riferimento ruotante.

▶ La curva energetica spiega la possibilità di orbite chiuse (circolari / ellittiche) o aperte (paraboliche / iperboliche).



Il caso delle forze NON conservative

Si considera la situazione nella quale sulla massa agiscono forze sia conservative, $\vec{F}_c$, che NON conservative, $\vec{F}_{NC}$.

Associata alla forza conservativa c'è energia potenziale U tale che

$$W_c = \int \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\Delta U \qquad \text{per un qualunque cammino.}$$

La forza non conservativa in generale esegue lavoro ma non è possibile riferirsi a una (differenza di) energia potenziale per essa:

$$W_{NC} = \int \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r}$$

Calcolo del lavoro dato dalla forza totale $(\vec{F}_c + \vec{F}_{NC})$:

$$W_{TOT} = \int \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = W_C + W_{NC}$$

Bilancio energetico complessivo e teorema lavoro-energia

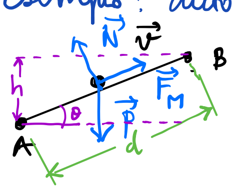
$$W_{TOT} = W_C + W_{NC} = -\Delta U + W_{NC} = \Delta E_K \quad \text{con} \quad \Delta U + \Delta E_K = \Delta E$$

ovvero $\boxed{\Delta E = W_{NC}}$

in presenza di forze non conservative l'energia meccanica varia in misura pari al lavoro di tali forze. L'energia meccanica può aumentare ($W_{NC} > 0$, forza «motrice») o diminuire ($W_{NC} < 0$, forza «resistente»).

es. 1

Esempio: automobile in salita con velocità costante: ci deve essere un motore che produce una forza $\vec{F}_M$



bilancio energetico fra A e B:

$E_{K_A} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad U_A = 0 \qquad E_A = \frac{1}{2} m v^2$

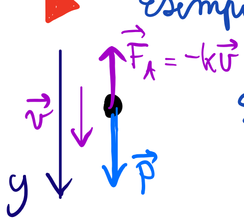
$E_{K_B} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad U_B = mgh = mgd\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad E_B = \frac{1}{2} m v^2 + mgd\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\Delta E = E_B - E_A = mgd\,\mathrm{sen}\,\theta$. Lavoro svolto da $\vec{F}_M$: $W_M = \vec{F}_M \cdot \vec{d} = F_M d$ con $F_M = mg\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\Rightarrow \Delta E = W_M$ (lavoro della forza motrice che ha aumentato l'energia meccanica)

es. 2

Esempio: oggetto in caduta in fluido viscoso: la velocità tende a una costante ma la quota continua a diminuire.



Si è già ottenuto che $v(t) = v_L(1 - e^{-\beta t})$ con $v_L = g/\beta = mg/k$

Calcolo della variazione temporale dell'energia meccanica $E = E_K + U$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgy\right) = mv\frac{dv}{dt} - mgv = mv(a - g) = mvg\left(e^{-\beta t} - 1\right) \quad \text{perché } a = \frac{dv}{dt} = ge^{-\beta t}$$

Dunque $\frac{dE}{dt} = -mvg(1 - e^{-\beta t}) = -mvg \cdot \frac{v}{v_L} = -\frac{mv^2 g}{v_L} = -kv^2 = \vec{F}_A \cdot \vec{v} = \mathcal{P}_A$ (potenza istantanea dissipata da $\vec{F}_A$)