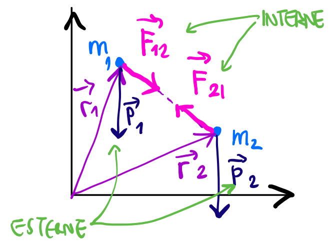
DINAMICA dei SISTEMI di PUNTI MATERIALI

Ovvero sullo studio dell'effetto di forze agenti sia esternamente che internamente a un sistema di particelle (punti) dotati di massa. Un sistema è un insieme di almeno 2 punti materiali

Ci si interessa sia a insieme di punti non vincolati fra di essi che a sistemi nei quali le posizioni reciproche fra i punti sono fisse (si parla per questi sistemi di CORPI RIGIDI).

Punto di partenza: schematizzazione del problema in termini di posizione delle masse e delle forze agenti su ciascuna di esse, suddivise in forze ESTERNE al sistema e in forze INTERNE al sistema (dovute alle mutue interazioni).

Schema particolare e semplice: 2 masse interagenti e soggette all'azione dei loro pesi $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$.



Si classificano come ESTERNE le forze peso.

Ci sono poi le forze di interazione $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ (per esempio: forza elettrica fra cariche, oppure una molla che collega m_1 e m_2).

Queste forze vengono classificate come INTERNE.

Si scrivono le due equazioni del moto:

$$\boxed{\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{P}_1+\vec{F}_{12} \\ m_2\vec{a}_2 &= m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{P}_2+\vec{F}_{21} \end{aligned}}$$

e si realizza che sono equazioni differenziali accoppiate tramite le forze interne, che dipendono dalla posizione relativa fra le masse.

Utilizzando il fatto che, per il III principio della dinamica (*) è $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, si prova a sommare per ottenere che

(*) come lo si conosce fino a questo punto!

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{P}_1+\vec{P}_2+\cancel{\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}} = \vec{P}_{TOT} = (m_1+m_2)\vec{g}$$

Si scopre che esiste una coordinata vettoriale la cui evoluzione è determinata solamente dalla forza ESTERNA, che qui è il PESO TOTALE del sistema, $(m_1+m_2)\vec{g}$.

Definendo $\vec{R}=\dfrac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ l'equazione «somma» diventa $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\vec{g}$,

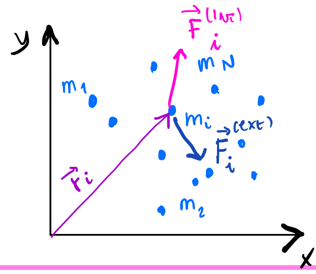
ovvero il punto collocato nella posizione $\vec{R}$ ha semplicemente l'accelerazione $\vec{g}$, come se il sistema si fosse ridotto a un'unica massa puntiforme.

DA APPROFONDIRE!

FORMULAZIONE GENERALE del PROBLEMA

N masse puntiformi m_i $(i=1,\dots,N)$ soggette ciascuna a una

- forza esterna $\vec{F}_i^{(ext)}(\vec{r}_i)$ [dipendente solo dalla posizione (eventualmente anche la velocità) della massa i-esima] e una
- forza interna $\vec{F}_i^{(int)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_N)$ [dipendente dalle posizioni di tutte le altre N-1 masse, oltre che dalla sua posizione]



Si scrivono le N equazioni differenziali vettoriali (3N scalari) del moto delle masse:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)}\quad,\quad i=1,2,\dots,N \qquad (*)$$

che, se risolte, conducono alle N leggi orarie vettoriali $\vec{r}_i(t)$

In generale si tratta di un problema $\boxed{\text{risolubile solo numericamente}}$ già a partire da 3 masse. Si cercano soluzioni non per ciascuna singola massa ma per una rappresentazione complessiva del sistema in qualche senso.

Si procede ricordando che dalle equazioni (*) derivano anche le equazioni del momento di forza / momento angolare

velocità del polo O di riferimento

$$\vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i^{(ext)}+\vec{F}_i^{(int)}\right) = \vec{\tau}_{O_i}^{(ext)} + \vec{\tau}_{O_i}^{(int)} = \frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} + \vec{v}_O\times\vec{p}_i\quad,\quad i=1,\dots,N$$

(**) e le equazioni che esprimono il teorema lavoro-energia cinetica

$$\int_{C_{AB\,i}}\vec{F}_i^{(ext)}\cdot d\vec{r} + \int_{C_{AB\,i}}\vec{F}_i^{(int)}\cdot d\vec{r} = W_{AB\,i}^{(ext)} + W_{AB\,i}^{(int)} = \Delta E_{K_{AB\,i}}\quad,\quad i=1,\dots,N$$

Si continua con la **SOMMA** sulle N masse di tutte le equazioni sopra riportate.

A questo scopo si introducono le seguenti grandezze «totali»:

(***)

$\vec{P} = \sum_1^N{}_i\,\vec{p}_i$ [quantità di moto totale del sistema]

$\vec{L}_O = \sum_1^N{}_i\,\vec{L}_{O_i}$ [momento angolare totale del sistema rispetto O]

$\vec{F}^{(ext)} = \sum_1^N{}_i\,\vec{F}_i^{(ext)}$, $\vec{F}^{(int)} = \sum_1^N{}_i\,\vec{F}_i^{(int)}$ [forza esterna / interna totale agente sul sistema]

$\vec{\tau}_O^{(ext)} = \sum_1^N{}_i\,\vec{\tau}_{O_i}^{(ext)}$, $\vec{\tau}_O^{(int)} = \sum_1^N{}_i\,\vec{\tau}_{O_i}^{(int)}$ [momento totale delle forze esterne / interne rispetto O]

$W_{AB}^{(ext)}$, $W_{AB}^{(int)}$ [lavoro totale delle forze ext / int nel percorso che connette le configurazioni A e B]

$\Delta E_{K_{AB}}$ [variazione totale di energia cinetica nel percorso che connette le configurazioni A e B]

Eseguite le somme sulle N masse m_i delle equazioni (*) e (**) in termini delle grandezze totali (***) si ottengono queste espressioni:

(*)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} + \vec{F}^{(int)}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O\times\vec{P} = \vec{\tau}_O^{(ext)} + \vec{\tau}_O^{(int)}$$

$$W_{AB}^{(ext)} + W_{AB}^{(int)} = \Delta E_{K_{A,B}}$$

NB in queste espressioni c'è tutto ma è difficile risolverle (e comprenderle) in termini generali

Vale la pena di riscriverle:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} + \vec{F}^{(int)} \\ &\frac{d\vec{L}_o}{dt} + \vec{v}_o \times \vec{P} = \vec{\tau}_o^{(ext)} + \vec{\tau}_o^{(int)} \\ &W_{AB}^{(ext)} + W_{AB}^{(int)} = \Delta E_{k_{A,B}} \end{aligned}}$$

Si intravedono delle particolari novità nel significato di queste relazioni: diversamente dalle espressioni per le singole masse, le equazioni dei momenti totali e dei lavori totali NON si possono derivare da quelle delle quantità di moto / forze totali.

OVVERO

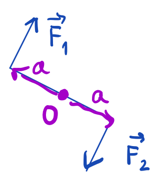
non è sufficiente conoscere il risultante delle forze ($\vec{F}^{(ext)}$, $\vec{F}^{(int)}$) per determinare il momento totale rispetto il polo O ($\vec{\tau}_o^{(ext)}$, $\vec{\tau}_o^{(int)}$) e neppure il lavoro totale per il cammino Γ_{AB}

OVVERO

il momento totale in generale NON è il momento della forza totale e il lavoro totale in generale NON è il lavoro della forza totale.

Esempi per convincere

Sistema di una coppia di forze con risultante nullo : $\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

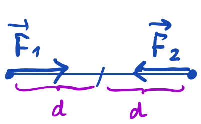


calcolo del momento totale (somma dei due momenti) rispetto il polo O :

$$\vec{\tau}_o = \vec{\tau}_{o_1} + \vec{\tau}_{o_2} = \vec{a} \times \vec{F}_1 - \vec{a} \times \vec{F}_2 = 2\vec{a} \times \vec{F}_1 = 2\vec{a} \times \vec{F}_2 \neq \vec{0}$$

però il momento del risultante $\vec{F}_{TOT}$ è nullo.

Sistema di due forze parallele e contrarie che lavorano su un cammino di avvicinamento reciproco : $\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$



calcolo del lavoro totale (somma dei due lavori)

$$W_{TOT} = W_1 + W_2 = \vec{d} \cdot \vec{F}_1 - \vec{d} \cdot \vec{F}_2 = 2dF_1 = 2dF_2 \neq 0$$

però il lavoro del risultante $\vec{F}_{TOT}$ è nullo.

IL TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA dei SISTEMI

Come già intravisto a supporto della descrizione dell'esperimento di Huygens che ha condotto all'idea di forza come interazione che fa variare la quantità di moto, si rafforza e si estende il concetto e la sostanza di leggi di CONSERVAZIONE.

Nello specifico si osserva in generale che

E' il III principio nella forma più generale

> IN UN SISTEMA ISOLATO (LIBERO da INTERAZIONI con l'ESTERNO) SI CONSERVANO LA QUANTITA' DI MOTO TOTALE E IL MOMENTO della QUANTITA' di MOTO (MOMENTO ANGOLARE) TOTALE RISPETTO A UN POLO FISSO

NB questa formulazione impegna caratteristiche cinematiche ($\vec{P}$ e $\vec{L}_0$) del sistema. Grazie alle relazioni (*) sopra ottenute che collegano variazioni di $\vec{P}$ e $\vec{L}_0$ all'azione di forze esterne, il III principio conduce a una lettura dinamica, ovvero delle proprietà delle forze in gioco.

Si sceglie un polo fisso (così $\vec{v}_O=\vec{0}$ nelle (*)) e si «isola» il sistema, ovvero si pone $\vec{F}^{(ext)}=\vec{0}$ e $\vec{\tau}_0^{(ext)}=\vec{0}$ sempre nelle (*) che diventano, per la parte relativa a forze e momenti,

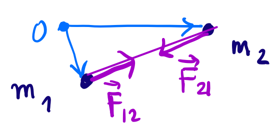
$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}^{(int)} \quad ; \quad \frac{d\vec{L}_0}{dt}=\vec{\tau}_0^{(int)} .$$

Il III principio richiede che sia $\vec{P}=\vec{cost}$, $\vec{L}_0=\vec{cost}$ per cui $\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{0}$, $\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\vec{0}$

e quindi
$$\vec{F}^{(int)}=\vec{0} \quad ; \quad \vec{\tau}_O^{(int)}=\vec{0}$$

> ovvero le forze interne sono a risultante e momento risultante nullo: questo VALE ANCHE SE IL SISTEMA NON E' LIBERO/ISOLATO perché le forze interne dipendono solo dalle coordinate relative ma non dall'eventuale azione di forze esterne.

> In sostanza, le forze di interazione fra le masse, le $\vec{F}_i^{(int)}$, costituiscono un sistema di coppie di forze a braccio nullo, prese a due a due.
>
> Nel caso di due sole masse questo equivale a (ri)formulare il principio di azione e reazione:



$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=\vec{0}$$
$$\vec{\tau}_{O_1}+\vec{\tau}_{O_2}=\vec{0}$$

→ In definitiva si può scrivere che, per un sistema generico di masse con riferimento a un polo fisso O, che

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} \quad ; \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O^{(ext)}}$$

sono 2 equazioni vettoriali (6 scalari in 3D) che costituiscono le EQUAZIONI (CARDINALI) della DINAMICA dei SISTEMI di PUNTI MATERIALI

Il sistema di N particelle ha 3N gradi di libertà per cui le 6 equazioni cardinali NON determinano completamente il moto «puntuale» del sistema stesso, ma solamente le sue caratteristiche cinematiche «totali» $\vec{P}$ e $\vec{L}_O$ in termini dei risultanti delle forze esterne e dei momenti delle forze esterne.

Le equazioni cardinali della dinamica sono sufficienti a determinare tutte le caratteristiche cinematiche del sistema quando questo è di natura rigida, ovvero nel caso in cui le forze interne NON consentono moti relativi fra le parti costituenti il sistema.

→ **QUANTITÀ di MOTO TOTALE & CENTRO di MASSA**

Esplorazione in dettaglio della I equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad \vec{P} = \sum_{1}^{N}{}_i \vec{p}_i = \sum_{1}^{N}{}_i m_i \vec{v}_i ,$$

deve fornire informazioni «globali» sul moto di traslazione del sistema.

Si introduce la coordinata vettoriale definita come

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_1^N{}_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_1^N{}_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

M è la massa totale
$\vec{r}_{cm}$ è una media delle posizioni dei punti pesata sulle loro masse

Si calcola $\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_1^N{}_i m_i \vec{v}_i$, per cui, dalla definizione di momento, $\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\vec{P}}{M}$,
e dunque la I equazione cardinale diventa

$$\boxed{\vec{F}^{(ext)} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = M\vec{a}_{cm}}$$

NB: si pone $\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}$ e $\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$

▶ La I equazione cardinale spiega che l'azione del risultante delle forze esterne è relativa al punto (non materiale) di coordinata $\vec{r}_{cm}$, detto CENTRO di MASSA del sistema, che risponde a $\vec{F}^{(ext)}$ come se possedesse la massa totale $M = \sum_i m_i$

- → Il centro di massa sostituisce il sistema quando si vuole descrivere l'azione del risultante delle forze esterne su di esso.

- → Conviene dunque sapere molto bene cos'è / dov'è il centro di massa di un sistema

Il centro di massa ha posizione vettoriale $\vec{r}_{cm}$ data sopra e dunque, in un riferimento cartesiano, ha componenti

$$x_{cm} = \sum_1^N {}_i m_i x_i / M, \quad y_{cm} = \sum_1^N {}_i m_i y_i / M, \quad z_{cm} = \sum_1^N {}_i m_i z_i / M$$

Il sistema, con massa totale $M = \sum_1^N {}_i m_i$, è riducibile a un punto materiale di massa M collocato in $\vec{r}_{cm} \equiv (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$ per quanto riguarda l'azione traslatoria delle forze esterne.

Il centro di massa (CM) ha velocità $\vec{v}_{cm} = d\vec{r}_{cm}/dt$ e accelerazione $\vec{a}_{cm} = d\vec{v}_{cm}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$. Quest'ultima è data da

$$\vec{a}_{cm} = \vec{F}^{(ext)} / M$$

Se il sistema è libero, $\vec{F}^{(ext)} = 0$ per cui $\vec{a}_{cm} = 0$, $\vec{v}_{cm} = \overrightarrow{cost}$ e dunque il CM si muove di moto rettilineo uniforme.

I moti delle singole masse sono regolati anche dall'azione delle forze INTERNE per cui la I equazione cardinale non spiega i singoli moti.

Si osserva, nella II equazione cardinale, $\vec{\tau}_0^{(ext)} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} + \vec{v}_0 \times \vec{P}$ che se $O \equiv CM$ allora, essendo

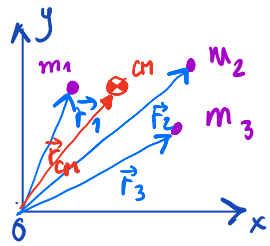
$$\vec{v} \times \vec{P}_{CM} = \vec{v}_{cm} \times M\vec{v}_{cm} = 0,$$ vale che si può scrivere

$$\vec{\tau}_0^{(ext)} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \qquad (O \text{ fisso})$$

sia quando il polo è fisso, sia quando il polo O coincide con il CM, anche se questo è in movimento,

$$\boxed{\vec{\tau}_{cm}^{(ext)} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}} \qquad (\text{CM anche in movimento})$$

DETERMINAZIONE della POSIZIONE del CM



Per un sistema discreto di masse, per esempio (nel piano xy)

$m_1 = 3\ kg,\ \vec{r}_1 = (1,3)\ m$

$m_2 = 4\ kg,\ \vec{r}_2 = (4,4)\ m$

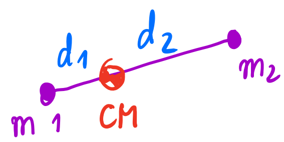
$m_3 = 2\ kg,\ \vec{r}_3 = (4,2)\ m$

$\Rightarrow$

$$x_{CM} = \frac{3\,kg \cdot 1\,m + 4\,kg \cdot 4\,m + 2\,kg \cdot 4\,m}{9\,kg} = \frac{25}{9}\,m \simeq 2.7\,m$$

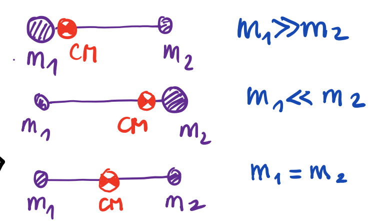
$$y_{CM} = \frac{3\,kg \cdot 3\,m + 4\,kg \cdot 4\,m + 2\,kg \cdot 2\,m}{9\,kg} = \frac{29}{9}\,m \simeq 3.2\,m$$

Nel caso di due masse, si osserva che il CM è situato sulla CONGIUNGENTE le due masse. Inoltre si dimostra facilmente che

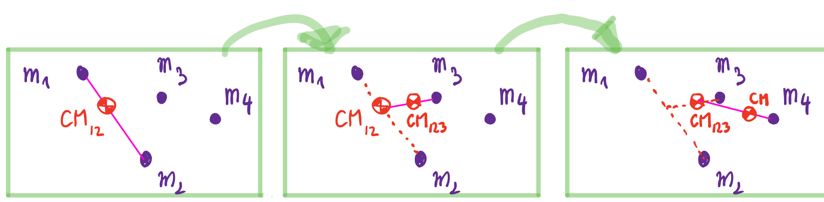


$m_1 d_1 = m_2 d_2$

per cui succede che $\Rightarrow$

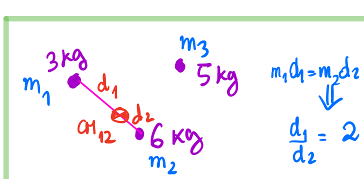


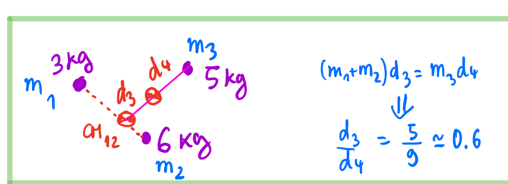
COSTRUZIONE PROGRESSIVA della POSIZIONE del CM



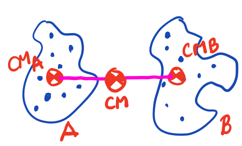
$$\vec{r}_{CM_1} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \quad \vec{r}_{CM_{123}} = \frac{(m_1+m_2)\vec{r}_{CM_1} + m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3} \quad \vec{r}_{CM} = \frac{(m_1+m_2+m_3)\vec{r}_{CM_{123}} + m_4\vec{r}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

Per esempio





Si estende a sistemi comunque complessi di punti materiali



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A \vec{r}_{CMA} + m_B \vec{r}_{CMB}}{m_A + m_B}$$