Studio del bilanciere con bracci a lunghezza variabile

Se il sistema NON è rigido vuol dire che le forze interne possono essere in grado, per esempio, di variare la distanza $2r$ fra le masse.

L'equazione cardinale della dinamica però NON dipende dalle forze (o dai momenti delle forze) interne ma solo ESTERNE.

Quindi continua a valere il risultato

$$\vec{L}_O = 2mr^2\vec{\omega} = \vec{\text{cost}}$$

Si supponga che le forze INTERNE provochino la variazione della distanza fra le masse dal valore $2r$ al valore $2r'$. Applicando la legge di conservazione del momento angolare sopra scritta, si ottiene

$$2mr^2\vec{\omega} = 2mr'^2\vec{\omega}' \quad \text{ossia, in modulo,} \quad r^2\omega = r'^2\omega'$$

NB $m = \text{cost}$

Se r varia, allora ω deve variare al nuovo valore

$$\boxed{\omega' = \omega\,(r/r')^2} \qquad [\text{se } r' \gtrless r \Rightarrow \omega' \lessgtr \omega]$$

ovvero, se le masse si avvicinano (si allontanano) la velocità di rotazione aumenta (diminuisce), come accade quando in una piroetta si avvicinano o allontanano le braccia al corpo.

- Si calcola la variazione di energia cinetica del sistema:

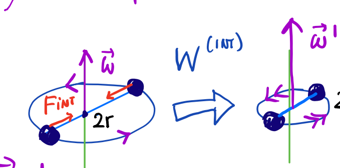
$$E_{k_i} = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = mv^2 = m\omega^2r^2$$

$$E_{k_f} = \tfrac{1}{2}m_1v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2'^2 = mv'^2 = m\omega'^2r'^2$$

$$\Delta E_K = E_{k_f} - E_{k_i} = m(\omega'^2r'^2 - \omega^2r^2) = m\omega^2\left[\left(\frac{r}{r'}\right)^4 r'^2 - r^2\right]$$

$$= m\omega^2r^2\left(\frac{r^2}{r'^2} - 1\right) = E_{k_i}\,\frac{r^2 - r'^2}{r'^2} = W^{(INT)}_{r\to r'}$$

per cui $\Delta E_K \gtrless 0$ se $r \gtrless r'$: se le masse si avvicinano l'energia cinetica aumenta, e questo perché le forze INTERNE hanno svolto un lavoro positivo W quando hanno spinto le masse alla nuova distanza $2r' < 2r$. NB: le forze INTERNE non modificano $\vec{L}_O$!



- $\boxed{\text{EFFETTO di (MOMENTI di) FORZE ESTERNE}}$

Considerando ancora l'esempio delle due masse collegate dalla sbarretta sottile, ora si torna all'ipotesi di sistema RIGIDO (r non può variare) ma si studia l'effetto di forze esterne.

Una risultante $\vec{F}^{(ext)}$ applicata al sistema si è visto che è tale da accelerare il centro di massa del sistema come se fosse un punto con massa totale $M = m_1 + m_2 = 2m$.

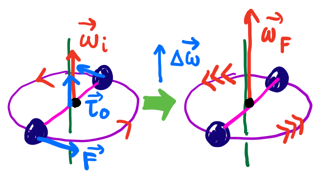
Si consideri qui $\vec{F}^{(ext)} = 0$ ma si immagini che le forze esterne sulle masse siano in grado di esercitare un MOMENTO RISULTANTE esterno, per esempio rispetto il polo fisso O (il punto di mezzo fra le masse).

▶ Si vuole quindi studiare l'equazione $\boxed{\vec{\tau}_O^{(ext)} = d\vec{L}_o/dt \neq 0 \quad \text{con } \vec{L}_o = 2mr^2\omega\hat{k}}$

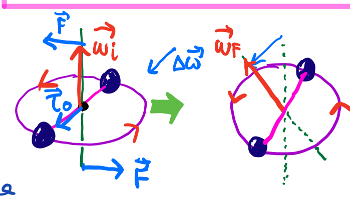
Si vede che, se r è costante (sistema rigido), $\vec{\tau}_O^{(ext)} \neq 0$ è tale da variare $\vec{L}_o$ per quanto riguarda il vettore $\vec{\omega}$.

Ci sono due possibilità (che non si escludono a vicenda):
$\boxed{\begin{array}{l}\text{può variare il modulo di } \omega \\ \text{può variare la direzione } \hat{k} \text{ di } \omega\end{array}}$

Se $\vec{\tau}_O^{(ext)}$ è parallelo a $\vec{L}_o(\vec{\omega}_i)$ (coppia «motrice») si ottiene una variazione del modulo di ω



Se $\vec{\tau}_O^{(ext)}$ è perpendicolare a $\vec{L}_o(\vec{\omega}_i)$ (coppia torcente) si ottiene una variazione della direzione di $\vec{\omega}$

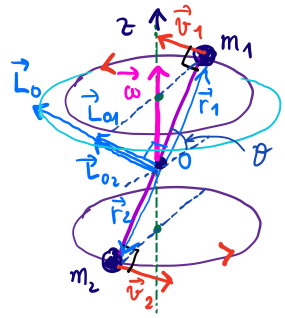


● → $\boxed{\text{ESTENSIONE del CASO di STUDIO : MANUBRIO « SBILANCIATO »}}$

Si considera lo stesso sistema appena trattato con la (importante) differenza che ora la sbarretta è INCLINATA rispetto l'asse di rotazione.

Conseguenza: il momento angolare del sistema non è più costante anche se la velocità angolare lo è.

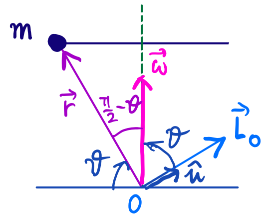
Si osserva che il vettore $\vec{L}_o$ ruota attorno all'asse z (direzione di $\vec{\omega}$) con velocità angolare $\vec{\omega}$ (si parla di precessione del momento angolare)



Si calcola $\vec{L}_O = \vec{L}_{O1} + \vec{L}_{O2}$, $\vec{L}_{Oi} = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$

$= m_i\, \omega \cos\theta\, r^2\, \hat{u}$ — versore di $\vec{L}_{Oi}$; angolo di inclinazione della sbarretta.

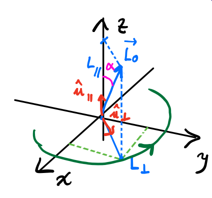
Quindi $\boxed{\vec{L}_O = 2md^2\omega\cos\theta\,\hat{u}}$ $(d = r)$



▶ Il versore di $\vec{L}_O$, $\hat{u}$, non è costante, ruota con velocità angolare ω attorno a z.

Si scompone $\vec{L}_O$ secondo le direzioni di z ($\hat{u}_\parallel$, parallela a $\vec{\omega}$) e nel piano xy ($\hat{u}_\perp$, $\perp$ a $\vec{\omega}$):

$\vec{L}_O = L_\parallel \hat{u}_\parallel + L_\perp \hat{u}_\perp$; dal disegno $L_\parallel = L_O\cos\theta = 2md^2\omega\cos^2\theta$
$L_\perp = L_O\sin\theta = 2md^2\omega\sin\theta\cos\theta$



Applicando la II equazione cardinale: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = L_\perp \frac{d\hat{u}_\perp}{dt}$ perché solamente il versore $\hat{u}_\perp$ varia nel tempo ($\vec{L}_\parallel$ è costante). Vale anche $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}_O$.

▶ È necessario un momento risultante esterno $\vec{\tau}_O^{(ext)} = L_\perp \frac{d\hat{u}_\perp}{dt}$ per mantenere in rotazione il sistema (è un caso di rotazione attorno a un asse NON LIBERO)

Si può anche vedere che il momento richiesto (perpendicolare a $\hat{u}_\perp$) ha modulo

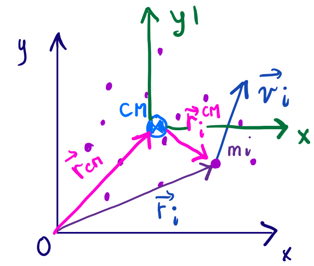
$\tau_O^{(ext)} = L_\perp \left|\frac{d\hat{u}_\perp}{dt}\right| = \omega L_\perp^* = 2md^2\omega^2\sin\theta\cos\theta$ * per la relazione di Poisson.

▶ Questo esempio spiega perché c'è usura dei cuscinetti (momenti applicati) di ruote SBILANCIATE.

ENERGIA CINETICA di un SISTEMA di CORPI

Si considera il sistema di N corpi m_i con posizioni $\vec{r}_i$ e velocità $\vec{v}_i$ in un riferimento inerziale Oxy.

Si considera un riferimento non necessariamente inerziale solidale con il centro di massa del sistema e in moto traslatorio rispetto Oxy.



Si considerano le trasformazioni di coordinate cinematiche da Oxy a SCM:

$$\vec{r}_i^{CM} = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM} \;, \qquad \vec{v}_i^{CM} = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM} \iff \vec{v}_i = \vec{v}_i^{CM} + \vec{v}_{CM}$$

Si calcola l'energia cinetica totale nel riferimento Oxy:

$$E_K = \sum_1^N{}_i E_{K_i} = \sum_1^N{}_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i \left(\vec{v}_i^{CM} + \vec{v}_{CM}\right)\cdot\left(\vec{v}_i^{CM} + \vec{v}_{CM}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i (v_i^{CM})^2 + \frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i (v^{CM})^2 + \left(\sum_1^N{}_i\, m_i \vec{v}_i^{CM}\right)\cdot \vec{v}_{CM} .$$

I tre termini sono:

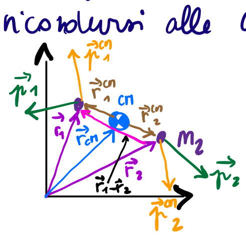
- $\frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i (v_i^{CM})^2 = E_K^{CM}$ ← Energia cinetica totale riferita (relativa) al centro di massa [vista nel SCM]
- $\frac{1}{2}\sum_1^N{}_i\, m_i (v^{CM})^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$ ← Energia cinetica totale del centro di massa [visto come punto di massa totale $M = \sum_1 {}_i m_i$]
- $\underbrace{\left[\sum_1^N{}_i\, m_i \vec{v}_i^{CM}\right]}\cdot \vec{v}_{CM}$

questa somma è $\boxed{\text{nulla}}$ perché è la misura della velocità del centro di massa $\left[\vec{v}^{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i \vec{v}_i / M\right]$ vista dal centro di massa, $\sum_1^N{}_i\, m_i \vec{v}_i^{CM} = M\vec{v}^{CM}$.

Quindi $$\boxed{E_{K_{TOT}} = E_K^{CM} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$ [scomposizione di Koenig dell'energia cinetica]

ANCORA sul PUNTO di VISTA del CM: MOMENTO ANGOLARE

Per un sistema a due corpi la situazione è semplicemente quella di ricondursi alle coordinate relative:



$$\vec{L}^{CM} = \vec{L}_1^{CM} + \vec{L}_2^{CM} = \vec{r}_1^{\,c}\times\vec{p}_1^{\,c} + \vec{r}_2^{\,c}\times\vec{p}_2^{\,c} =$$

$$= (\vec{r}_1^{\,c} - \vec{r}_2^{\,c})\times\vec{p}_1^{\,c} \qquad [\text{in quanto } \vec{p}_2^{\,c} = -\vec{p}_1^{\,c}]$$

$$= \vec{r}_{12}\times\vec{p}_1^{\,c} \qquad [\text{in quanto } \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1^{\,c} - \vec{r}_2^{\,c}]$$

$$= \mu_{12}\,\vec{r}_{12}\times\vec{v}_{12} \qquad [\text{in quanto } \vec{p}_1^{\,c} = \mu_{12}\vec{v}_{12}]$$

▶ Quindi $\vec{L}^{CM}_{(TOT)} = \mu_{12}\,\vec{r}_{12}\times\vec{v}_{12}$ (contano solo le coordinate relative e la massa ridotta).