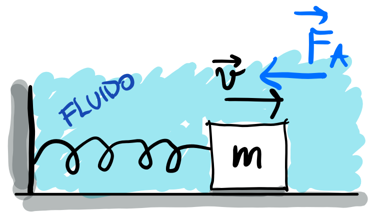
Oscillatore smorzato



Si considera un oscillatore nel modello di Hooke soggetto a una forza di smorzamento (per esempio causata da attrito viscoso) proporzionale alla velocità, per cui l'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

termine viscoso á la Stokes

si è posto $x_0 = 0$ (lunghezza a riposo della molla nulla)

che si può riscrivere così

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad 2\gamma = b/m \ , \quad \omega_0^2 = k/m$$

È un'equazione differenziale al II ordine di I grado omogenea a coefficienti costanti che i matematici sono molto bravi a risolvere.

La tecnica generale è quella di inventarsi la soluzione $x(t) = e^{zt}$ dove z è un numero complesso ($z = a + ib$), sostituirla nell'equazione e vedere cosa succede. Si scopre che in generale si assiste a un comportamento esponenziale del moto che, se l'attrito viscoso non è troppo grande, prevede anche un moto di tipo oscillatorio. Più precisamente, se succede che $\gamma < \omega_0$ (ovvero se $\frac{b}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$, $b < 2\sqrt{k \cdot m}$) allora la soluzione è del tipo « oscillatorio smorzato »,

da determinare

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_s t + \phi)$$

Il conto:

$$\dot{x} = \left[-\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega_s t + \phi) + \omega_s e^{-\alpha t} \cos(\omega_s t + \phi)\right] A =$$

$$= Ae^{-\alpha t}\left[\omega_s \cos(\omega_s t + \phi) - \alpha \sin(\omega_s t + \phi)\right]$$

$$\ddot{x} = -A\alpha e^{-\alpha t}\left[\omega_s \cos(\omega_s t + \phi) - \alpha \sin(\omega_s t + \phi)\right] +$$

$$+ Ae^{-\alpha t}\left[-\omega_s^2 \sin(\omega_s t + \phi) - \alpha\omega_s \cos(\omega_s t + \phi)\right] =$$

$$= Ae^{-\alpha t}\left[(\alpha^2 - \omega_s^2)\sin(\omega_s t + \phi) - 2\alpha\omega_s \cos(\omega_s t + \phi)\right]$$

sostituendo nell'equazione differenziale (dividendo per $Ae^{-\alpha t}$):

$$\left[(\alpha^2 - \omega_s^2) - 2\alpha\gamma + \omega_0^2\right]\sin(\omega_s t + \phi) + 2\omega_s(\gamma - \alpha)\cos(\omega_s t + \phi) = 0$$

per cui, annullando identicamente l'espressione,

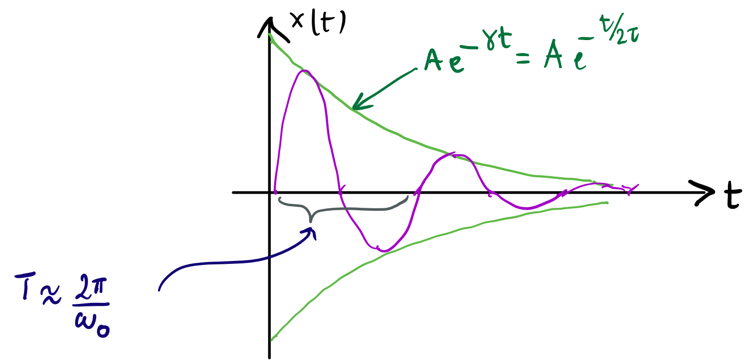
$$(\alpha^2-\omega_s^2) - 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0 \quad , \quad \gamma - \alpha = 0$$

ovvero $\alpha = \gamma$, $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = \omega_0\sqrt{1-\gamma^2/\omega_0^2} \approx \omega_0 - \gamma^2/2\omega_0$

e la soluzione generale è quindi (per un oscillatore debolmente smorzato)

$$\boxed{x(t) = A\, e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\, t + \phi\right), \quad \underline{\gamma \ll \omega_0}}$$

In sostanza, in questa approssimazione il moto è rappresentato da un'oscillazione armonica con periodo $T_s = 2\pi/\omega_s = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \approx T_0 = 2\pi/\omega_0$ e ampiezza decrescente esponenzialmente con costante di tempo $\tau = \frac{1}{2\gamma} \gg \frac{1}{\omega_0} = \frac{T_0}{2\pi}$



A e ϕ vengono fissati dalle condizioni iniziali del moto.

NB: $\tau = \frac{1}{2\gamma}$ è il tempo «caratteristico» di smorzamento.

La massa «perde» energia (cinetica + potenziale elastica) con ritmo esponenziale, che si calcola facilmente sempre nel limite di piccolo smorzamento ($\gamma \ll \omega_0$) e risulta pari a

$$E(t) \cong \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} = \frac{1}{2} k A^2 e^{-t/\tau}$$

NB per ottenere questo risultato, nel calcolo dell'energia cinetica, $\frac{1}{2}mv^2$, la velocità va approssimata in questo modo: $v = \dot{x} \approx A e^{-\gamma t} \omega_s \cos(\omega_s t + \phi)$ ovvero senza includere la derivata del fattore esponenziale (ok se $\gamma \ll \omega_0$)

Nei casi di attrito grande ($\gamma \geq \omega_0$) la soluzione è differente: non si osservano più oscillazioni ma solamente un avvicinamento alla posizione di equilibrio con andamento essenzialmente esponenziale. La velocità di avvicinamento è massima nel caso di smorzamento «critico», ovvero per $\gamma = \omega_0$.