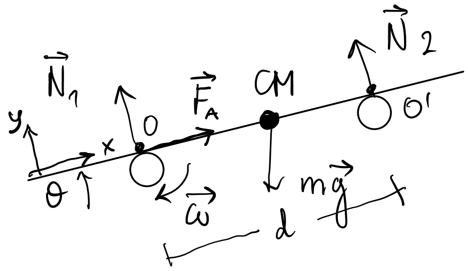
1.



Equazioni del moto proiettate:

$$m\ddot{x}_{cm} = F_A - mg\sin\vartheta = \mu N_1 - mg\sin\vartheta$$

$$m\ddot{y}_{cm} = N_1 + N_2 - mg\cos\vartheta = 0$$

$$\begin{cases} \tau_{1_O} = dN_2 - x_{cm}\cdot mg\cos\vartheta = 0 \\ \tau_{2_{O'}} = dN_1 - (d - x_{cm})\, mg\cos\vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \left(1 - \frac{x_{cm}}{d}\right) mg\cos\vartheta \\ N_2 = \frac{x_{cm}}{d}\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_{cm} = \mu\left(1 - \frac{x_{cm}}{d}\right) g\cos\vartheta - g\sin\vartheta$$: oscillatore armonico con

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu g\cos\vartheta}{d}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g\cos\vartheta}} = 1.5\,s$$

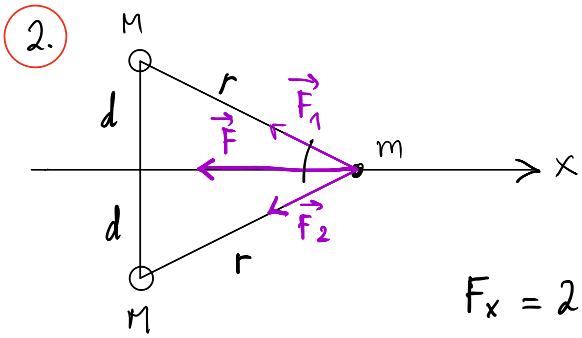
Condizione per l'equilibrio

$$\mu\left(1 - \frac{x_0}{d}\right) g\cos\vartheta = g\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{x_0}{d} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\mu} \quad \Rightarrow \quad x_0 = d\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\mu}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_0\left(\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0.25\,m$$

Caso dell'attrito statico (rullo fermo) $F_s = \mu mg\cos\vartheta = 33.2\,N$

2.



$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \frac{GmM}{r^2} = G\frac{mM}{x^2+d^2}$$

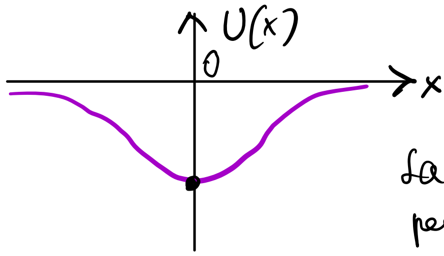
$$F_x = 2F_{1x} = 2F_{2x} = -2\,|\vec{F}_1|\cdot\frac{x}{r} = -\frac{2GmMx}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$

$$F_y = 0$$

$$\begin{matrix} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x} = -2GM\frac{x}{(x^2+d^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = 0$$

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) = -\frac{2GmM}{r} = -\frac{2GmM}{(x^2+d^2)^{1/2}};$$ [entro una costante additiva]

$U(x)$ è tale che $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, $F_x = -\frac{dU}{dx}$



Si calcola $U(x=0) = -\frac{2GmM}{d}$.

La velocità critica è tale che per $x \to \infty$ tutta l'energia meccanica si annulla:

$$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{2GmM}{(x_0^2+d^2)^{1/2}} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad v_c = 2\sqrt{\frac{GM}{(x_0^2+d^2)^{1/2}}}.$$

Per la conservazione dell'energia $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{2GmM}{(x_0^2+d^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}mv_R^2 - \frac{2GmM}{d}$

con v_R velocità per $x=0$ $\Rightarrow$ $v_R = \sqrt{v_0^2 + 4GM\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{(x_0^2+d^2)^{1/2}}\right]}$

Approssimazione di $U(x)$ attorno a $x=0$ $(x \ll d)$:

$$U(x) = -\frac{2GmM}{d}\frac{1}{(1+x^2/d^2)^{1/2}} \underset{x\ll d}{\simeq} -\frac{2GmM}{d}\left(1 - \frac{x^2}{2d^2}\right) = U(0) + \frac{1}{2}kx^2$$

con $k = 2GmM/d^3$ costante elastica associata: la pulsazione è

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2GM}{d^3}}$, il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2d^3}{GM}}$

3. lo stato iniziale ha coordinate termodinamiche

$$P_i = 4.5\,\text{bar},\quad T_i = 293\,K \Rightarrow V_i = \frac{nRT_i}{P_i} = 10.8 \times 10^{-3}\,m^3$$

dopo l'espansione irreversibile il nuovo stato di equilibrio ha coordinate

$$P_f = 1\,\text{bar},\quad T_f = 293\,K \Rightarrow V_f = \frac{nRT_f}{P_f} = 48.7 \times 10^{-3}\,m^3 .$$

Il gas ha la stessa temperatura iniziale e finale, per cui

$$\Delta U = 0, \quad Q = W = P_{ext}\,\Delta V = P_f\,(V_f - V_i) = 3.8 \times 10^{3}\,J$$

La variazione di entropia del gas si ottiene dalla trasformazione reversibile isoterma,

$$\Delta S_g = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = 25\,J/K$$

Quella dell'ambiente (termostato a temperatura T_f) è

$$\Delta S_a = -\frac{Q}{T_f} = -\frac{3.8 \times 10^3\,J}{283\,K} \simeq -13\,J/K$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_g + \Delta S_a = 12\,J/K > 0 .$$

Se la trasformazione è eseguita in modo reversibile

$$W^R = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = nRT_i \ln V_f/V_i = 7.3 \times 10^3\,J$$

$$\Delta S_g = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = 25\,J/K, \quad \Delta S_a = -\frac{W^R}{T_i} = -25\,J/K,$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_g + \Delta S_a = 0\,J/K$$

4.

Il Contenitore, a causa della differenza di temperatura interno — esterno, dà luogo a un flusso termico misurato secondo la legge di Newton - Fourier

$$|\dot{Q}| = kS\frac{\Delta T}{d}, \quad \Delta T = T_{ext} - T_{int}$$

La ΔT è costante perché il ghiaccio scioglie a 0°C e ciò continua fino al passaggio completo allo stato liquido. Quindi la temperatura interna rimane essenzialmente a 0°C e le bibite restano fresche.

Il calore necessario per sciogliere m kg di ghiaccio a 0°C è

$$Q_{FUS} = \lambda \cdot m \cong 3{,}4 \times 10^5 \, J$$

Il flusso termico associato dipende dalla conducibilità termica ovvero dalla resistenza termica r secondo la scrittura

$$\dot{q} = \dot{Q}/S = k\,\Delta T/d = \Delta T/r, \quad r = d/k$$

Nel caso della plastica $\quad r_p = d/k_p = 10^{-2}\,m \,/\, 0.2\,W/mK = 5\times10^{-2}\,m^2 \cdot K/W$

quindi $\quad \dot{Q}_p = S\dot{q}_p = S\,\Delta T/r_p = 0.8\,m^2 \times 30\,K \,/\, 5\times10^{-2}\,m^2 \cdot K/W = 480\,W$

Il tempo richiesto per trasferire Q_{FUS} è $\quad t_p = Q_{FUS}/\dot{Q}_p = \dfrac{3.4\times10^5\,J}{480\,J/s} \cong 7\times10^2\,s$

Essendo $t_p < 3600\,s$, in un'ora il ghiaccio si è fuso completamente e la temperatura aumenta: picnic rovinato.

Con la fodera di lana (conducibilità termica k_L) la resistenza termica diventa

$$r_F = r_p + r_L = \frac{d}{k_p} + \frac{d}{k_L} = 10^{-2}\,m\left(\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.02}\right)\frac{m \cdot K}{W} = 0.55\,\frac{m^2 K}{W}$$

quindi $\quad \dot{Q}_F = S\dot{q}_F = S\,\Delta T/r_F = 0.8\,m^2 \times 30\,K \,/\, 0.55\,m^2 \cdot K/W = 44\,W$

$\Rightarrow$ tempo per la fusione $\quad t_F = Q_{FUS}/\dot{Q}_F = \dfrac{3.4\times10^5\,J}{44\,J/s} \cong 7.8\times10^3\,s > 3600\,s$

$\Rightarrow$ in un'ora il ghiaccio non si è fuso $\Rightarrow$ la lana ha salvato il pic-nic.