- Giustificazione dell'equazione di Fourier: unione delle due relazioni

bilancio energetico $\frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = -\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}$ flusso $\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x}$

→ per ottenere $\boxed{\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)}$ EQUAZIONE 1-DIM DEL CALORE (eq. di FOURIER) ←

NB: in 3-D la si può scrivere utilizzando gli operatori vettoriali $\vec{\nabla}$ nella forma

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T)$$
$$= k\Delta T \quad (\text{se } k = \text{cost})$$

che però non verranno ulteriormente considerati qui.

$\left[\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$ è il laplaciano.

Si tratta di un'equazione differenziale alle derivate parziali) per il campo di temperature $T(x,t)$ che, una volta risolta, permette anche di ottenere il flusso termico tramite la $\dot{q} = -k\,\partial T/\partial x$.

Se la conducibilità termica k è omogenea nel mezzo considerato (non dipende da x – né dalla temperatura) allora l'equazione del calore si può scrivere in questo modo:

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_v}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

α è la DIFFUSIVITÀ TERMICA (nel SI si misura in m^2/s) e misura il rapporto

$$\boxed{\text{DIFFUSIVITÀ} = \frac{\text{CONDUCIBILITÀ TERMICA}}{\text{CAPACITÀ TERMICA}}}$$

ed è quindi legata alla misura della «disponibilità» e «rapidità» di un materiale a trasportare energia per causa di un gradiente termico: una elevata conducibilità assieme a una bassa capacità (tendenza a "trattenere" energia) concorrono a un'efficiente diffusione termica (e viceversa).

In presenza di sorgenti/pozzi termici nel materiale (p. es. una resistenza elettrica percorsa da corrente o altro) il bilancio energetico ne deve tenere conto e si scrive

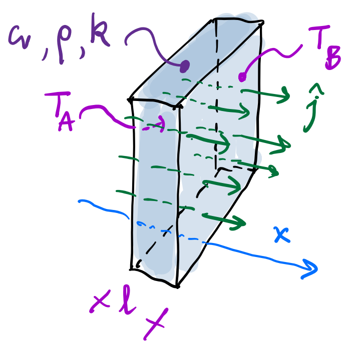
$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial x} + \dot{q}^{\pm}_{INT}$$

$\gtrless 0$ è la densità di volume di potenza termica $[W/m^3]$

• SITUAZIONE STAZIONARIA : un semplice caso 1-DIM stazionario con geometria elementare e qualche numero.

Stazionarietà $\iff$ $T = T(x)$ ovvero $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

Conduzione termica attraverso una lamina omogenea a facce piane e parallele con temperature uniformi e costanti, T_1 e T_2.
Si escludono "effetti ai bordi" ovvero il flusso termico avviene solo perpendicolarmente alle facce (si può anche pensare a una lamina di estensione infinita).



Si parte dalla

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \iff k \frac{dT}{dx} = \text{costante}$$

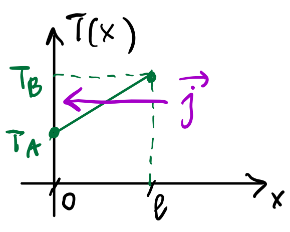
dove $k = \text{costante}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{dT}{dx} = \text{costante}}$

quindi T è funzione lineare di x (posizione lungo la lamina) : $T(x) = \alpha + \beta x$

Si applicano le condizioni al contorno,

$$T(x=0) = T_A \quad , \quad T(x=\ell) = T_B$$

$\Rightarrow$ $\alpha = T_A$, $\beta = (T_B - T_A)/\ell$ $\Rightarrow$ $\boxed{T(x) = T_A + (T_B - T_A) \cdot \frac{x}{\ell}}$



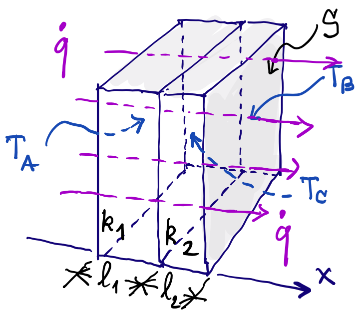
se $T_A < T_B$ il flusso è nel verso decrescente delle x e all'interno della lamina la temperatura cresce linearmente.

Il flusso è dato da $\dot{q} = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{(T_B - T_A)}{\ell} < 0$ se $T_B < T_A$

LAMINE a STRATI e RESISTENZA TERMICA

Applicazione della geometria 1D per lamine a facce piane e parallele sovrapposte.

Esercizio per iniziare: due lamine sovrapposte, temperature fisse T_A e T_B.



Ci si aspetta un flusso 1D nella direzione x stazionario (indipendente dal tempo) e COSTANTE a ogni posizione x per conservazione dell'energia (non ci sono sorgenti / perdite nelle lamine per ipotesi).

Si introduce la temperatura T_C alla superficie di contatto fra le lamine.

Flusso attraverso la prima lamina $\dot q_1 = -\frac{k_1}{\ell_1}(T_C - T_A)$

Flusso attraverso la seconda lamina $\dot q_2 = -\frac{k_2}{\ell_2}(T_B - T_C)$

conservazione del flusso: $\dot q_1 = \dot q_2 = \dot q$ (attraverso le due lamine)

$$\Rightarrow \frac{k_1}{\ell_1}(T_C - T_A) = \frac{k_2}{\ell_2}(T_B - T_C) \Rightarrow T_C = \left(\frac{k_1}{\ell_1}T_A + \frac{k_2}{\ell_2}T_B\right) \Big/ \left(\frac{k_1}{\ell_1} + \frac{k_2}{\ell_2}\right)$$

$$\Rightarrow \dot q = -\frac{k_1}{\ell_1}(T_C - T_A) = -\frac{k_1}{\ell_1}\left[\frac{\frac{k_1}{\ell_1}T_A + \frac{k_2}{\ell_2}T_B}{\frac{k_1}{\ell_1} + \frac{k_2}{\ell_2}} - T_A\right] = -\frac{\frac{k_1}{\ell_1}\cdot\frac{k_2}{\ell_2}(T_B - T_A)}{\frac{k_1}{\ell_1} + \frac{k_2}{\ell_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot q = -\frac{1}{\frac{\ell_1}{k_1} + \frac{\ell_2}{k_2}}(T_B - T_A)}$$

Dipende solo da T_B e T_A!

Si generalizza scrivendo $|\dot q| = \frac{|\Delta T|}{r}$, $r = \sum_1^N {}_i\, \ell_i / k_i$ per un pacchetto di N lamine parallele.

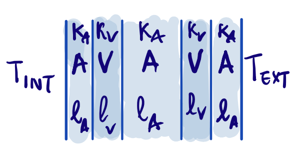
r è la «resistenza termica specifica» e si scrive anche per la potenza totale

$|\dot Q| = \frac{|\Delta T|}{R} = |\dot q| S \Rightarrow R = \frac{|\Delta T|}{|\dot q| S} = \frac{r}{S} = \frac{1}{S}\sum_1^N {}_i \frac{\ell_i}{k_i}$ è la resistenza termica del pacchetto.

NB l'analogia elettrica $i = \frac{\Delta V}{R}$ vs $|\dot Q| = \frac{|\Delta T|}{R}$ e l'idea di resistenza (totale) in serie.

$\dot Q$ ("costo" energetico) è inversamente proporzionale a R che diminuisce con l'area dello strato, aumenta con gli spessori e cala con bassa conducibilità.

Interessante conto / esercizio: finestra a «doppio vetro», ovvero pacchetto di cinque (5) lamine aria+vetro+aria+vetro+aria. Confronto delle resistenze termiche del doppio vetro (R_5) e del singolo vetro (R_1): dal conto sopra fatto (ipotizzando la stessa superficie S)

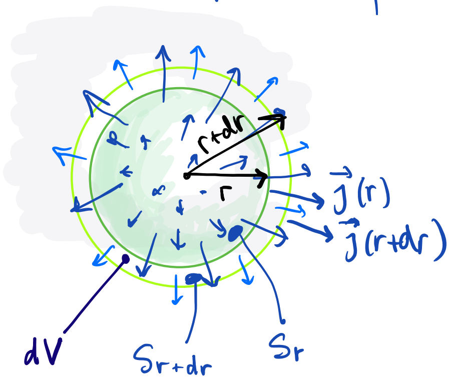


$\frac{R_5}{R_1} = \frac{2\ell_V/K_V + 3\ell_A/K_A}{\ell_V/K_V}$; preso (per esempio) $\ell_V = \ell_A \Rightarrow R_5 = \left(2 + 3\frac{K_V}{K_A}\right) R_1$

Realisticamente $K_V \simeq 1$ W/°C·m, $K_A \simeq 0{,}025$ W/°C m $\Rightarrow R_5 \sim 120 R_1 \Rightarrow \dot Q_5 = \dot Q_1 / 120$: un risparmio sulla bolletta di 120 volte!

- Esercizio «teorico» di rilievo: riscrittura dell'equazione del calore in geometrie (e simmetria) sferica e cilindrica.

→ Simmetria sferica: flusso termico $\vec{j}$ radiale e centrale



Si indica $\dot q_r = |\vec{J}(r)|$ e $\dot q_{r+dr} = |\vec{J}(r+dr)|$

Il flusso termico radiale comporta un bilancio energetico nello strato sferico fra i raggi r e r+dr dato da

$S_r \dot q_r - S_{r+dr}\dot q_{r+dr}$ (potenza, watt)

che deve corrispondere alla quantità $d\dot Q = dM\, c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \rho\, c_v\, dV \frac{\partial T}{\partial t}$

Lo strato sferico ha volume $dV = 4\pi r^2 dr$ per cui

$$S_r\dot q_r - S_{r+dr}\dot q_{r+dr} = 4\pi r^2 \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}\, dr$$

$S_r = 4\pi r^2$, $S_{r+dr} = 4\pi(r+dr)^2 \cong 4\pi r^2 + 8\pi r\, dr$ (+ordini trascurabili in dr)

$\dot q_{r+dr} \cong \dot q_r + \frac{\partial \dot q}{\partial r} dr$ (sviluppo in serie di Taylor o def. di derivata)

$$\Rightarrow S_r\dot q_r - S_{r+dr}\dot q_{r+dr} \approx 4\pi\left[\cancel{r^2\dot q_r} - \cancel{r^2\dot q_r} - r^2\frac{\partial \dot q}{\partial r}dr - 2r\dot q_r dr + O(dr^2)\right] = -4\pi r^2\left[\frac{\partial \dot q_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\dot q_r\right] dr$$

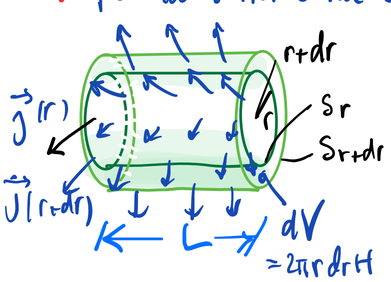
[NB oppure direttamente $d\dot Q = d(S\dot q) = \frac{\partial(S\dot q)}{\partial r}dr = 4\pi\frac{\partial(r^2\dot q)}{\partial r}dr$]

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \dot q_r}{\partial t} + \frac{2}{r}\dot q_r\right] = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\dot q);$$ dalla $\dot q = -k\frac{\partial T}{\partial r}$

simmetria sferica & k, α omogenei

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{k}{\rho c_v}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \alpha\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)}$$

→ per la simmetria cilindrica si procede nello stesso modo; qui il flusso radiale diventa



$$S_r\dot q_r - S_{r+dr}\dot q_{r+dr} \approx -2\pi L\left[\dot q_r + r\frac{\partial \dot q_r}{\partial r}\right]dr =$$

$$= d\dot Q = dM\, c_v\frac{\partial T}{\partial t} = \rho c_v dV \frac{\partial T}{\partial t} = 2\pi r L \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} dr$$

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r}\left[\dot q_r + r\frac{\partial \dot q_r}{\partial r}\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot q_r)$$

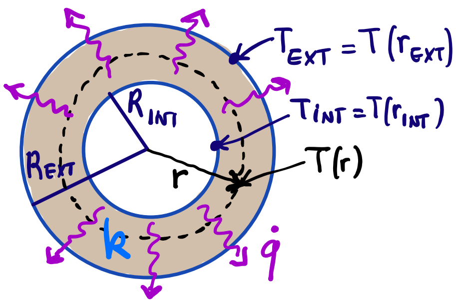
dalla $\dot q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r}$ $\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k\cdot r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)}$

[oppure $d\dot Q = d(S\dot q) = 2\pi L\frac{\partial}{\partial r}(r\dot q)dr$]

simmetria cilindrica, k e α omogenei

CASI DI GEOMETRIA / SIMMETRIA SFERICA

(I) Calcolo dell'andamento della temperatura e del flusso/potenza termica fra due sfere concentriche mantenute a temperature costanti e con materiale di conducibilità omogenea e costante assegnata.



$T_{INT} > T_{EXT}$ (per esempio)

Si utilizza l'equazione del calore in coordinate radiali/sferiche nel caso stazionario ($dT/dt=0$) e $k=\text{cost}$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0 \iff \boxed{r^2\frac{dT}{dr}=\text{cost}}$$

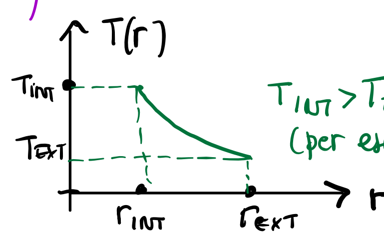
Integrando: $\frac{dT}{dr} = \frac{c}{r^2}$ ← cost $\iff T = T_0 - \frac{c}{r}$

Si impongono ora le condizioni al contorno per determinare le due costanti T_0 e c, ovvero:

$$T(r_{EXT}) = T_0 - \frac{c}{r_{EXT}} = T_{EXT}, \quad T(r_{INT}) = T_0 - \frac{c}{r_{INT}} = T_{INT}.$$

Esercizio banale e noioso, si ottiene (quasi subito) che

$$T(r) = T_{INT} - \left[\frac{T_{INT}-T_{EXT}}{r_{EXT}-r_{INT}}\right] r_{EXT}\cdot\left[1-\frac{r_{INT}}{r}\right]$$



$T_{INT} > T_{EXT}$ (per esempio)

Il flusso è dato da $\dot{q} = -k\frac{dT}{dr} = k\left[\frac{T_{INT}-T_{EXT}}{r_{EXT}-r_{INT}}\right]\frac{r_{ext}r_{INT}}{r^2}$

la potenza è $\dot{Q} = S\dot{q} = 4\pi r^2\dot{q} = 4\pi k\,(T_{INT}-T_{EXT})\frac{r_{ext}\,r_{INT}}{r_{ext}-r_{int}} = \text{cost} > 0$

conservazione dell'energia

se $T_{INT} > T_{ext}$