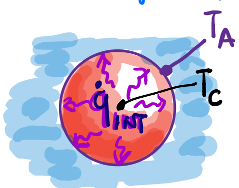
(II) Sfera di materiale radioattivo di raggio $R = 0{,}1\ m$ immersa in acqua con temperatura costante $T_A = 100°C$. Conducibilità della sfera $k = 400\ W/°C\,m$. La sfera va considerata come sorgente sferica di densità di potenza termica costante pari a $\dot{q}_{INT} = 10^8\ W/m^3$. Calcolare l'andamento della temperatura nella sfera.



Si utilizza ancora la $\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{q}_{INT} = 0$

sorgente termica — regime stazionario

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{r^2\dot{q}_{INT}}{k} \Rightarrow \text{(integrando)}$$

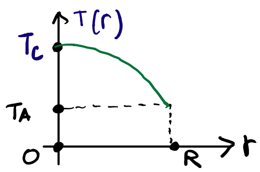
$$\Rightarrow r^2\frac{dT}{dr} = -\frac{r^3\dot{q}_{INT}}{3k} + cost \Leftrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{r\,\dot{q}_{INT}}{3k} + \frac{cost}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(integrando)}\ T = -\frac{r^2\dot{q}_{INT}}{6k} - \frac{cost}{r} + T_0\ ;$$ $cost = 0$ perché altrimenti per $r = 0$ si ottiene $T = \infty$.

$\dot{Q} = \frac{4}{3}\pi r^3 \dot{q}_{INT}$

Resta $T(R) = -\frac{R^2\dot{q}_{INT}}{6k} + T_0 = T_A \Rightarrow T(r) = \frac{\dot{q}_{INT}}{6k}(R^2 - r^2) + T_A$

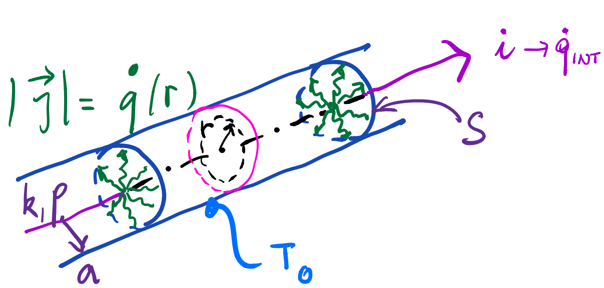
$T_{CENTRO} = T_C = T(0) = \frac{\dot{q}_{INT}R^2}{6k} + T_A = 790\ K = 517°C$



NB notare qui che $\dot{Q}$ non è costante all'interno della sfera: c'è un generatore di potenza termica!

• UN CASO DI SIMMETRIA CILINDRICA

Filo conduttore percorso da corrente elettrica costante i.



Il conduttore ha conducibilità termica costante k e resistività elettrica ρ, ovvero resistenza elettrica $R = \rho\,l/S$ per un tratto di lunghezza l.

Equazione stazionaria di Fourier nella coordinata radiale:

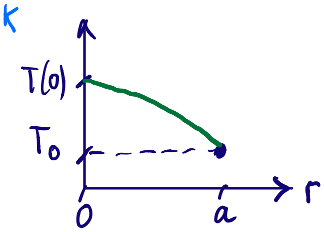
$$k\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \dot{q}_{INT} = 0 \Rightarrow r\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_{INT}}{2k}r^2 + A \Rightarrow T = -\frac{\dot{q}_{INT}}{4k}r^2 + \cancel{A \ln r} + B$$

$A = 0$

$$T(r=a) = T_0 = -\frac{\dot{q}_{INT}a^2}{4k} + B \Rightarrow T(r) = \frac{\dot{q}_{INT}}{4k}(a^2 - r^2) + T_0$$

dalla legge di Joule $\dot{Q} = Ri^2 = \rho\frac{l}{S}i^2 \Rightarrow$

$$\dot{q}_{INT} = \frac{\dot{Q}}{V} = \frac{\rho\,l\,i^2}{S \cdot S\,l} = \frac{\rho\,i^2}{\pi^2 a^4}$$



→ CONVEZIONE

Un corpo (solido) con una temperatura di superficie T_S è esposto a un fluido (gas o liquido) a temperatura T_∞ (misurata a distanza dal corpo abbastanza elevata tale che il fluido non è disturbato dal corpo).

Si instaura un flusso termico (W/m^2, potenza per unità di superficie interessata) di natura « convettiva » che risulta proporzionale al salto di temperatura fra la superficie di contatto solido-fluido e la temperatura indisturbata del fluido:

$$\dot{q}_{conv} \propto (T_S - T_\infty)$$

che si scrive usualmente in termini della superficie interessata S:

$$\boxed{\dot{Q}_{conv} = h\, S\, (T_S - T_\infty)}$$

← Legge di « raffreddamento » di Newton

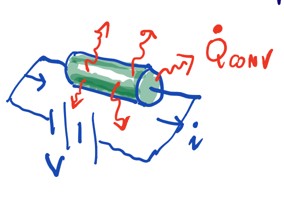
La costante di proporzionalità h è detta coefficiente convettivo e si misura nel SI in

$$[h] = W/m^2\,°C = W/m^2 K$$

- La legge è di « raffreddamento » se $T_\infty < T_S$ (flusso termico uscente dal corpo) ma può essere ribaltata se $T_\infty > T_S$;
- La convezione va vista come "somma" di conduzione (scambio cinetico fra atomi) e di trasporto di massa (parti del fluido in movimento)
- La convezione dipende quindi dalla velocità del fluido e può essere naturale / libera oppure forzata / ventilata.
- h non è (solo) una proprietà del fluido ma anche dei dettagli della forma del corpo, della sua orientazione, dell'area esposta etc: valori « tipici »

$h_{gas}^{naturale} \sim (1 \div 50)\, \frac{W}{m^2\,°C}$; $h_{gas}^{forzata} \sim (20 \div 500)\, \frac{W}{m^2\,°C}$; $h_{liq}^{naturale} \sim (10 \div 1000)\, W/m^2\,°C$; $h_{liq}^{forzata} \sim (50 \div 30{,}000\, \frac{W}{m^2\,°C})$

Esercizio: stima sperimentale di h con una resistenza elettrica in aria



La resistenza è alimentata a 6 V e ci scorre una corrente $i = 0.2A$. La sua temperatura superficiale è $T_S = 160°C$ e quella dell'aria $T_\infty = 20°C$. La sua area è di $2 \times 10^{-4}\, m^2$: $h = \frac{\dot{Q}}{S \Delta T} = \frac{V \cdot i}{S \Delta T} \sim 43\, \frac{W}{°C\, m^2}$