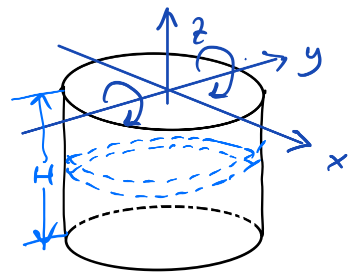
1

(a) Calcolo del momento di inerzia



$$I_{TOT,y} = I_{LAT,y} + I_{FONDO,y}$$

$$I_{LAT,y} = \int_0^H dI_{ANELLI,y}$$

$$dI_{ANELLI,y} = z^2 dm + \frac{R^2}{2} dm$$ dove $dm = \rho_{LAT} \cdot 2\pi R\, dz$ $\Rightarrow$

$$I_{LAT,y} = \int_0^H \left[z^2 + \frac{R^2}{2}\right] dm = \int_0^H \left[z^2 + \frac{R^2}{2}\right] \rho_{LAT} \cdot 2\pi R\, dz =$$

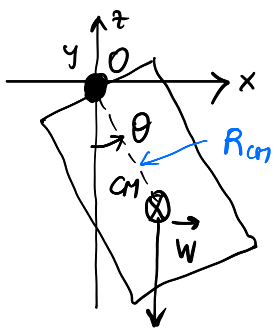
$$= \left[\frac{H^3}{3} + \frac{HR^2}{2}\right] \rho_{LAT} \cdot 2\pi R = 2\pi R \cdot H \rho_{LAT} \left[\frac{H^2}{3} + \frac{R^2}{2}\right] = m_1 \left[\frac{H^2}{3} + \frac{R^2}{2}\right] = 0.33 \text{ kg m}^2$$

$$I_{FONDO,y}(z=0) = \frac{I_{FONDO,z}}{2}$$ (è una lamina sottile a simmetria circolare)

$$I_{FONDO,y} = \frac{m_2 R^2}{4} + m_2 H^2 = m_2\left(\frac{R^2}{4} + H^2\right) = 1.15 \text{ kg m}^2$$ (per Steiner)

$$I_{TOT,y} = 1.48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(b)



Equazione cardinale (del moto rotazionale attorno all'asse O)

$$I_{TOT,y} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(m_1 + m_2) g R_{cm} \sin\theta$$

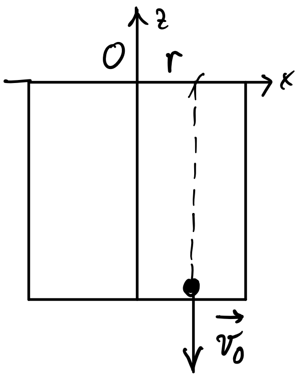
con $$R_{cm} = \frac{m_1 H/2 + m_2 H}{m_1 + m_2} = 0.48 \text{ m}$$

(c) per piccoli angoli $\sin\theta \simeq \theta$ $\Rightarrow$ $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{(m_1+m_2)}{I_{TOT,y}} g R_{cm} \theta = -\omega^2 \theta$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(m_1+m_2) R_{cm} g}{I_{TOT,y}}} = 0.63 \text{ Hz}$$

(d) $U_{MAX} = mgR_{cm}(1-\cos\vartheta_0) = E_{K\,max}(\vartheta=0) = 0.09\ J$

(e) conservazione del momento angolare rispetto al polo O

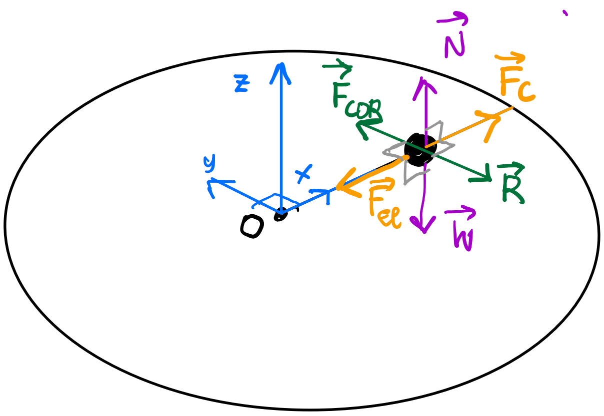


$$L_i = m_0 r v_0 = m_0 r\sqrt{2gH}$$

$$L_f = I_{TOT,y}\,\omega + m_0(H^2+R^2)\,\omega = L_i$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{m_0 r\sqrt{2gH}}{I_{TOT,y} + (H^2+R^2)\,m_0}$$

2



Forze agenti nel riferimento non-inerziale Oxyz:

peso $\vec W$ e reazione $\vec N$

forza elastica $\vec F_{el}$ e forza centrifuga $\vec F_c$

forza di Coriolis $\vec F_{COR}$ e reazione della guida $\vec R$

(a) Equazione del moto nel riferimento Oxyz:

$$m\vec a = \vec W + \vec N + \boxed{\vec F_{el}} + \boxed{\vec F_c} + \boxed{\vec F_{COR}} + \vec R =$$
$$= m\vec g + \vec N \boxed{-k\vec r} + \boxed{m\Omega^2 \vec r} \boxed{-2m\vec\Omega\times\vec v} + \vec R$$

Proiezione lungo l'asse x:

$$m\ddot x = -kx + m\Omega^2 x = -mx(k/m - \Omega^2)$$

ovvero $\ddot x = -\left(\frac{k}{m}-\Omega^2\right)x = -\omega_0^2 x$, che è l'equazione di un moto armonico semplice se $\Omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$

con periodo $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\sqrt{k/m-\Omega^2} = 5.28$ s

(b) Nel centro della piattaforma $\vec r$ è nullo per cui anche la forza centrifuga si annulla.

La forza di Coriolis vale $\vec F_{COR} = -2m\vec\Omega\times\vec v$, nel centro

$$\vec v = -\omega_0 R\hat\imath, \quad \vec\Omega = \hat k\Omega \quad \Rightarrow \quad \vec F_{COR} = 2m\omega_0 R\Omega\hat\jmath = 357\,\hat\jmath \text{ N}$$

(c) Rispetto il riferimento inerziale

$$\vec{v}^I = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} = -R\omega_0 \sin\omega_0 t\,\hat{i} + \vec{\Omega}\times\vec{r} =$$
$$= -R\omega_0 \sin\omega_0 t\,\hat{i} + \Omega R\cos\omega_0 t\,\hat{j}$$

in modulo
$$v^I = R\sqrt{\omega_0^2 \sin^2\omega_0 t + \Omega^2\cos^2\omega_0 t}$$

Per avere $x(t) = R/2$ con $v(t) < 0$ dev'essere $\cos\omega_0 t = 1/2$, $t = \frac{\pi}{3\omega_0}$

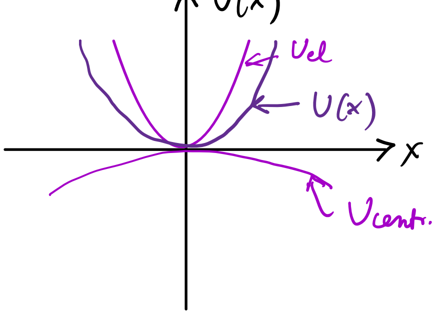
$$\Rightarrow \quad v^I = R\cdot\sqrt{\omega_0^2\cdot\frac{3}{4} + \frac{\Omega^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{3\omega_0^2 + \Omega^2} = 5.30 \ m/s$$

(d) Si esprime $\quad F_{COR} = F_{COR}(\Omega) = 2m\omega_0 R\Omega = 2mR\sqrt{\frac{K}{m} - \Omega^2}\cdot\Omega$

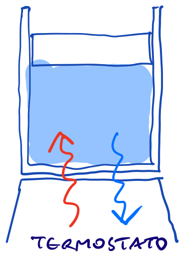
per massimizzare
$$0 = \frac{dF_{COR}}{d\Omega} = 2mR\left[\sqrt{\frac{K}{m} - \Omega^2} - \Omega^2\Big/\sqrt{\frac{K}{m} - \Omega^2}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \Omega_{max} = \sqrt{\frac{K}{2m}} = 0.91 \ rad/s$$

(e) se $\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ la forza radiale è nulla e dunque il carrello rimane fermo sul bordo

(f) $$U(x) = U_{el}(x) + U_{centr.}(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 = \frac{1}{2}(k - m\Omega^2)x^2$$



3



$n = 4$ $\quad T_i = 35°C$ $\quad$ gas biatomico

$P_0 = 1$ bar

(a) A causa dei salti termici le trasformazioni sono di natura irreversibile.

(b) Per il I principio, nella prima trasformazione si può scrivere, usando il lavoro dell'ambiente,

$$\Delta U = nc_v (T_A - T_i) = Q + W_{amb} =$$
$$= Q - P_0 (V_A - V_i) = Q - nR(T_A - T_i)$$

$$\Rightarrow \quad T_A = T_i + \frac{Q}{nc_p} = (35+273)\,K + \frac{1600\,cal \times 4.18\,J/cal}{4\,moli \times \frac{7}{2} \times 8.3\,J/mol\,K} \cong 366\,K = 93°C$$

Nella seconda trasformazione il calore è ceduto in quantità tale che

$$nc_p (T_B - T_A) = -Q \qquad [\text{lo stesso } Q \text{ di prima}]$$

$$\Rightarrow \quad T_B = T_A - \frac{Q}{nc_p} = T_i = 35°C$$

Il sistema ha compiuto un ciclo irreversibile ed è tornato allo stato termodinamico iniziale con

$$V_B = V_i = \frac{nRT_i}{P_0} = 128\,\ell$$

(c) Essendo un ciclo, $\Delta S_{gas} = 0$; $\quad \Delta S_{univ} = \Delta S_{amb} = \Delta S_{caldo} + \Delta S_{freddo} =$

$$= -\frac{Q}{T_{caldo}} + \frac{Q}{T_{freddo}} = 1600\,cal \times 4.18\,J/cal \left(\frac{1}{263\,K} - \frac{1}{433\,K}\right) = 10\,J/K$$

(d) essendo $\Delta U = Q_{TOT} - W = 0$ (ciclo) e $Q_{TOT} = 0 \Rightarrow W = 0$

(e) Lavoro degradato $\quad W_{degr} = T_{freddo} \Delta S_{univ} = Q\left(1 - \frac{T_{freddo}}{T_{caldo}}\right) \cong 2.6\ kJ$

Il ciclo necessario a produrre lo stesso ammontare di calore è di Carnot operante fra T_{fredda} e T_{calda}.

4

Bisogna calcolare $c = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT}$;

per il I principio $\delta Q = \delta W + dU = PdV + nc_v dT$

la trasformazione è politropica, per cui $PV^k = \text{costante}$;

il lavoro è quindi esprimibile come

$$\delta W = \frac{d(PV)}{1-k} = \frac{nR}{1-k}\,dT \Rightarrow$$

$$\delta Q = \frac{nR}{1-k}dT + nc_v dT = \left(\frac{R}{1-k} + c_v\right) n\,dT = \left(\frac{c_p - c_v}{1-k} + c_v\right) n\,dT =$$

$$= \frac{c_p - kc_v}{1-k}\,n\,dT = nc_v\frac{\gamma - k}{1-k}\,dT = nc\,dT$$

$$\Rightarrow \qquad c = c_v\frac{\gamma - k}{1-k}.$$

Se la trasformazione è

isocora $\Rightarrow$ $k = \infty$ $\Rightarrow$ $c = c_v$

isobara $\Rightarrow$ $k = 0$ $\Rightarrow$ $c = \gamma c_v = c_p$

adiabatica rev. $\Rightarrow$ $k = \gamma$ $\Rightarrow$ $c = 0$

isoterma $\Rightarrow$ $k = 1$ $\Rightarrow$ $c = \infty$