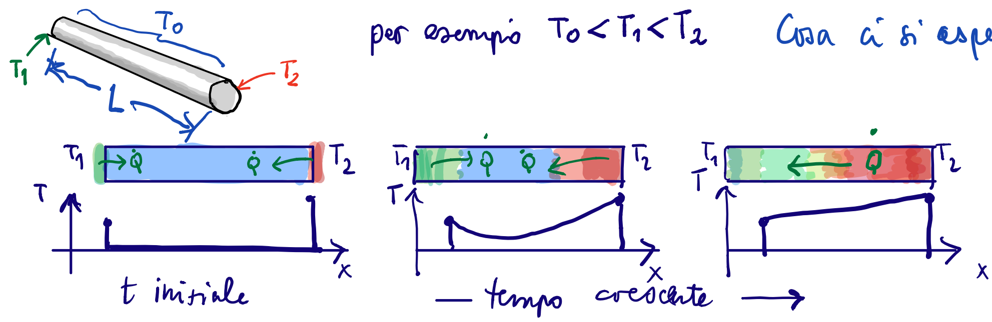
• DIPENDENZA dal TEMPO

Premessa: l'argomento è molto complicato dal punto di vista matematico e qui verrà solo accennato nei suoi tratti essenziali.

caso di una sbarretta sottile (1-DIM) con conducibilità termica k con i suoi estremi mantenuti a temperature differenti. La sbarretta, inizialmente, ha una temperatura omogenea T_0.. E' interessata solo a fenomeni di trasporto CONDUTTIVO al suo "interno", non c'è convezione né irraggiamento.

per esempio $T_0 < T_1 < T_2$ Cosa ci si aspetta?



Si instaura un flusso termico lungo la sbarretta che, in questo esempio, deve essere "bidirezionale", cioè gli atomi in media più eccitati a sinistra trasferiscono energia verso destra e viceversa da destra verso sinistra. Con il passare del tempo ci si aspetta (se la conducibilità è uniforme e costante) un andamento lineare della temperatura con un flusso termico costante da destra verso sinistra che mantiene il gradiente di temperatura.

Questo potrebbe essere un buon esempio di contatto termico fra termostati con temperature fissate.

E' un fenomeno DIPENDENTE DAL TEMPO governato dall'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_V} \leftarrow \text{diffusività termica.}$$

La soluzione di questa equazione (di tipo «alle derivate parziali») è del genere

$$T = T(x,t)$$

e va risolta con tecniche matematiche ben sviluppate dell'analisi. In particolare sono richieste le

condizioni al contorno [p.es. $T(x=0,t) = T_1$, $T(x=L,t) = T_2$]

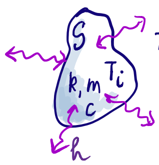
condizioni iniziali [p.es. $T(x,t=0) = T_0$].

Come anticipato si tratta di un problema matematico molto interessante e difficile.

→ SISTEMI a PARAMETRI CONCENTRATI

Problema principale: la distribuzione di temperatura all'interno del corpo soggetto a scambi termici.
Questa parte è descritta dalla derivata seconda spaziale nell'equazione del calore, $\partial^2 T/\partial x^2$

Approccio intuitivo a un caso di raffreddamento/riscaldamento di un corpo solido di calore specifico c, massa m, conducibilità termica k inizialmente a temperatura uniforme T_i che viene esposto a conduzione/convezione/irraggiamento con un parametro complessivo h sulla superficie S.



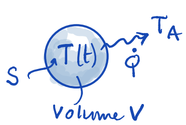
Si adotta la legge di Newton termica,

$$\dot{Q} = h\,S\,[T_i(t) - T]$$

$\dot{Q} = \dot{q}\,S$ qui $\dot{Q}$ è la potenza assorbita/ceduta dal corpo in ragione della sua capacità termica, $\dot{Q} = mc\,\frac{dT}{dt}$ [dalla $\delta Q = mc\,dT$].

Supponendo che il corpo sia relativamente piccolo e con grande conducibilità termica, se lo scambio termico non è troppo sostenuto (h elevato, superficie ampia) si può pensare che all'interno del corpo la temperatura sia distribuita uniformemente. Si parla in questo caso di SISTEMI CONCENTRATI («lumped systems»).

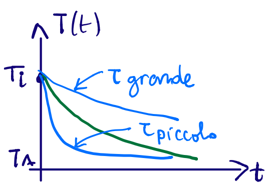
Per questi sistemi è possibile risolvere l'equazione del calore dipendente dal tempo in geometrie semplici.



vero, perchè $\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(T - T_A)$ (T_A cost)

$$\dot{Q} = -mc\,\frac{dT}{dt} = h\,S\,[T(t) - T_A] \Leftrightarrow \frac{d(T - T_A)}{dt} = -\frac{hS}{mc}(T - T_A)$$

$$\Rightarrow T - T_A = (T - T_A)_{t=0}\, e^{-t/\tau} \Leftrightarrow T = T_A + (T_i - T_A)\,e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{mc}{hS}$$



si ottiene la costante di tempo τ che si può anche scrivere come

$\tau = \frac{\rho c}{h}\frac{V}{S}$: il flusso termico è tanto più rapido (τ piccolo) quanto più h e S sono grandi (trasporto efficiente) e quanto più piccolo e poco capace termicamente è l'oggetto.

Il sistema NON è a parametri concentrati se la conduzione termica al suo interno non è efficace confrontata con i meccanismi di trasporto esterni.
Si quantifica questa richiesta rapportando le grandezze $\frac{\text{trasporto alla superficie}}{\text{conduzione nel volume}} = \frac{h \cdot S\,\Delta T}{k \cdot S\,\Delta T/L} = \frac{h L_c}{k}$

si è introdotto il numero di Biot, $Bi = \frac{h L_c}{k}$, $L_c = V/S$ è una «lunghezza caratteristica» del sistema.

Se $Bi \ll 1 \Rightarrow$ il sistema è a parametri concentrati e la sua temperatura interna varia uniformemente.

Per esempio: sfera di rame, $R = 12$ cm, $L_c = V/S = \frac{4}{3}\pi R^3 / 4\pi R^2 = R/3 = 4$ cm
$k = 400$ W/m·K, immersa in aria ferma, $h = 10$ W/m²K

$\Rightarrow Bi = 10\,\text{W/m}^2\text{K} \cdot 4\times10^{-2}\,\text{m} / (400\,\text{W/m·K}) = 0.001 \ll 1 \Rightarrow$ è «lumped».

Altro esempio: pollo nel forno, R, L_c e h come sopra ma $k \cong 1$ W/m·K (acqua)

$\Rightarrow Bi\,(\text{pollo}) \gg Bi\,(\text{rame}) \Rightarrow$ il pollo NON è «lumped» [temperatura interna e cottura non uniforme].