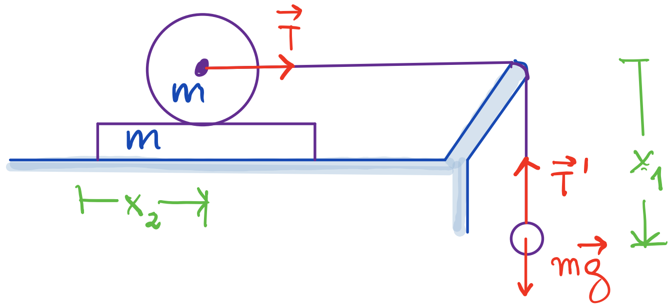
1

(a) Blocchi vincolati

Equazioni del moto:



$$m a_1 = m\ddot{x}_1 = mg - T'$$

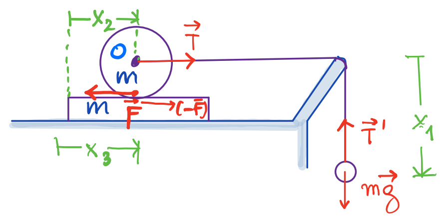
$$(m+m)a_2 = 2m\ddot{x}_2 = T$$

il filo è ideale $\Rightarrow$ $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = a$, $T = T'$ $\Rightarrow$ $ma = mg - 2ma$

$$a = g/3 \,, \quad x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{6}gt^2$$

Rotolamento puro del cilindro relativamente al blocco

(b) x_2 è la coordinata del CM del cilindro riferita al blocco:



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = mg - T' \\ m\ddot{x}_2 = T - F \\ m\ddot{x}_3 = F \end{cases}$$

$$I_0\ddot{\theta} = FR \quad \text{con} \quad R\ddot{\theta} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_3 \,, \quad I_0 = \frac{mR^2}{2}.$$

(c) filo ideale: $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$, $T = T'$

$$\Rightarrow \quad mg - T = T - F \Rightarrow F = 2T - mg = \frac{I_0}{R}\ddot{\theta} = \frac{m}{2}(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_3)$$

$$e \quad m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_3) = T - 2F = 2F \Rightarrow T = 4F$$

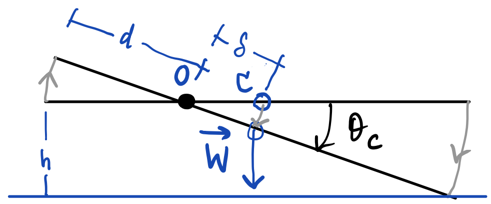
$$\Rightarrow \quad F = 2T - mg = 8F - mg \Rightarrow F = mg/7 \,, \quad T = 4mg/7$$

(d) moti uniformemente vari:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \frac{T-F}{m} = \frac{3}{7}g \,, \quad x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 = x_2(t) = \frac{1}{2}a_2t^2 = \frac{3}{14}gt^2$$

$$\ddot{x}_3 = F/m = g/7 \,, \quad x_3(t) = \frac{1}{2}a_3t^2 = \frac{g}{14}t^2$$

2



(a) Applicazione della conservazione dell'energia (gravitazionale).

Dal disegno $\quad d+\delta = L/2 \Rightarrow \delta = (L-2d)/2$

Condizione per il contatto $\quad (L-d)\cdot \operatorname{sen}\theta_c = h$

$E_i = 0$

$E_f = -mg\delta \sin\theta_c + \frac{1}{2} I_O \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_c^2 = \frac{2mg\delta \sin\theta_c}{I_O}$;

calcolo del momento di inerzia $\quad I_O = I_C + m\delta^2 = \frac{mL^2}{12} + m\frac{(L-2d)^2}{4} =$

$= m k_O^2$ dove $k_O^2 = \frac{L^2}{3} + d^2 - L\cdot d$

$$\Rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{g(L-2d)\cdot h}{(L-d)(L^2/3+d^2-L d)}}$$

(b) Equazione (Cardinale) del moto $\quad \vec{\tau}_O = I_O\vec{\alpha} \Rightarrow mg\delta\cos\theta = I_O \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g\delta}{k_O^2}\cos\theta = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{g\delta}{k_O^2}\cos\theta\, d\theta = \omega\, d\omega \Rightarrow \omega = \omega(\theta) = \sqrt{\frac{2g\delta \operatorname{sen}\theta}{k_O^2}} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g\delta}{k_O^2}\operatorname{sen}\theta}} = \int_0^t dt = t .$$

Non è un integrale elementare.

(c) Approssimazione geometrica $h \ll L-d \Rightarrow$ gli angoli sono piccoli, $\theta \ll 1$

per cui $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ e $\cos\theta \approx 1$.

L'integrale diventa elementare :

$$\int_{\theta=0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} \cong \sqrt{\frac{2g\delta}{k_0}}\, t \quad \Rightarrow \quad t = k_0 \sqrt{\frac{2\theta}{g\delta}}$$

Tempo di caduta quando $\theta = \theta_c \cong \frac{h}{L-d} \Rightarrow$

$$t_c \cong 2k_0 \sqrt{\frac{h/g}{(L-d)(L-2d)}} = 2 \sqrt{\frac{h/g\,(L^2/3+d^2-L\cdot d)}{(L-d)(L-2d)}}$$

Si può anche partire dall'equazione cardinale per piccoli angoli :

$$\tau_0 = mg\delta\cos\theta \approx mg\delta = I_0 \frac{d\omega}{dt} = m k_0^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dt} \cong \frac{g\delta}{k_0^2} \Rightarrow \omega = \frac{g\delta}{k_0^2} t$$ (aumento lineare di ω nel tempo)

Condizione di contatto : $\omega_c = \frac{g\delta}{k_0^2} t_c \Rightarrow t_c = \frac{k_0^2}{g\delta}\omega_c = k_0 \sqrt{\frac{2\theta_c}{g\delta}}$

(d) Tempo di salita = tempo di discesa

$$= \frac{\omega_i k_0^2}{g\delta} \quad \text{dove ora} \quad \omega_i = a\,\omega_c$$

$\Rightarrow$ tempo di rimbalzo $= \frac{2\omega_i k_0^2}{g\delta} = \frac{2\omega_c k_0^2}{g\delta}\cdot a = t^{(I)} = 2t_c\cdot a$

Secondo rimbalzo $t^{(II)} = \frac{2\omega_c k_0^2}{g\delta} a^2 = 2t_c\cdot a^2$

N-esimo rimbalzo $t^{(N)} = \frac{2\omega_c k_0^2}{g\delta} a^N = 2t_c\cdot a^N$

(e) Tempo di infiniti rimbalzi $t_\infty = \sum_{1}^{\infty}{}_N\, t^{(N)} = 2t_c \sum_{1}^{\infty}{}_N\, a^N = 2t_c \frac{a}{1-a}$

Tempo totale $t_c + t_\infty = t_c\left[1 + \frac{2a}{1-a}\right] = t_c \frac{1+a}{1-a}$

3

Equazione del trasporto termico convettivo

$$\dot{Q} = -h\,S\,\big(T(t) - T_A\big)$$

S: superficie esposta; $T(t)$: temperatura del corpo; T_A: temperatura del fluido indisturbata

Bilancio termico di riscaldamento del cubetto di ghiaccio:

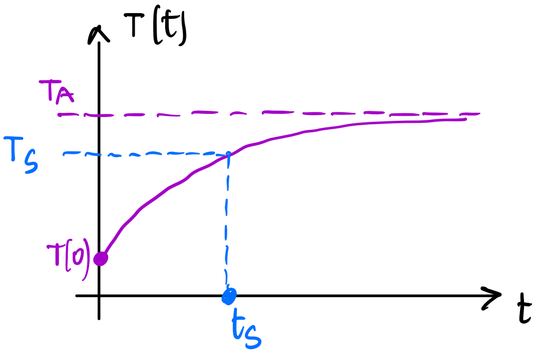
$$\dot{Q} = c \cdot m \cdot \frac{dT}{dt}$$

c: calore specifico; m: massa

Eguagliando $\quad c \cdot m \cdot \dfrac{dT}{dt} = -h\,S\,(T - T_A) \;\Rightarrow$

$$\frac{d\,(T - T_A)}{T - T_A} = -\frac{h \cdot S}{c \cdot m}\,dt \;\Rightarrow$$

$T(t) = T_A + \big(T(0) - T_A\big)e^{-t/\tau}$, $\tau = \dfrac{c \cdot m}{h \cdot S}$ è la costante di tempo.



Il ghiaccio inizia a sciogliersi per $T = T_S = 273\ \mathrm{K}$ al tempo $t = t_S$ tale che

$$t_S = \tau \ln \frac{T(0) - T_A}{T_S - T_A}$$

Valori numerici : $m = \rho \cdot V$, $\rho = 0.917 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, $V = 8 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^3}$, $S = 5 \times (4 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2})$

$$\tau = \frac{2 \times 10^3\ \mathrm{J/kg \cdot K} \times 8 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{50\ \mathrm{J/s \cdot m^2 K} \times 2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^2}} = 147\ \mathrm{s} \;\Rightarrow\; t_S = 101.7\ \mathrm{s}$$

④ In una trasformazione adiabatica $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{costante}$.

lungo il tratto BC è

(a) $P_0^{1-\gamma}T_C^{\gamma} = (4P_0)^{1-\gamma}T_B^{\gamma} \Rightarrow T_C = 4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_B = 241\ K = -31{,}8\ °C$

lungo il tratto CD è

(b) $Q_{CD} = nC_p(T_D - T_C) = nC_p \cdot [(-93+273)K - 241\ K] = -5{,}1\ kJ$

Altri calori scambiati

$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln\frac{1}{4} = -19.4\ kJ$;

$Q_{BC} = 0$;

$Q_{DE} = W_{DE} = nRT_D \ln\frac{V_E}{V_D} = nRT_D \ln\frac{1}{4} = -8{,}3\ kJ$;

$Q_{EF} = 0$

$Q_{FA} = nC_p(T_A - T_F) = nC_p\left(T_A - T_D \cdot 4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) = +26{,}3\ kJ$

(c) $Q_{TOT} = -6.4\ kJ$

(d) Coefficiente di prestazione $\omega = \frac{Q_{IN}}{|W|} = \frac{Q_{IN}}{|Q_{TOT}|} = \frac{Q_{FA}}{|Q_{TOT}|} = 4{,}1$

Essendo l'entropia funzione di stato si isolano gli stati DCB:

(e) $\Delta S_{DEFAB} = \Delta S_{DB} = \Delta S_{DC} + \Delta S_{CB} = \Delta S_{DC} = nC_p \ln\frac{T_C}{T_D} = 24{,}2\ J/K$

Tenendo conto dell'universo termodinamico

$\Delta S_{univ} = \Delta S_{DC} + \Delta S_{amb} \geq 0 \Rightarrow \Delta S_{amb} \geq -\Delta S_{DC} = -24{,}2\ J/K$

(f) cioè l'entropia dell'ambiente non diminuisce più di 24,2 J/K.

(g)