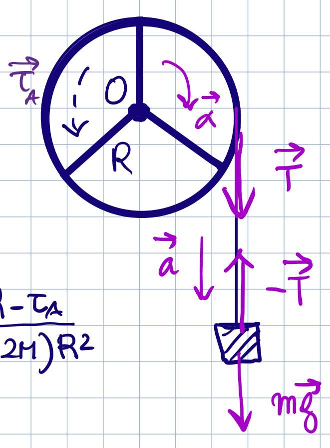
① Momento di inerzia rispetto O



(a) $I_0 = MR^2 + 3 \times \left(\frac{M}{3} R^2\right) = 2MR^2 = 0.04 \ kg \cdot m^2$

(b) Equazioni di moto :

$$\left.\begin{aligned} ma &= mg - T \\ I_0 \alpha &= TR - \tau_A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{mgR - \tau_A}{mR^2 + I_0} = \frac{mgR - \tau_A}{(m+2M)R^2}$$

non-slittamento : $a = \alpha R$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \alpha t$$

$\alpha = 1.64 \ \frac{rad}{s^2}$; $\omega_s = \alpha t_s$, $t_s = 4 \ s \Rightarrow \omega_s = 6.56 \ rad/s$

(c) Arresto della carrucola dopo la rotazione di un angolo θ_s per causa dell'attrito: teorema energia-lavoro :

$$\Delta E = E_f - E_i = 0 - \frac{1}{2} I_0 \omega_s^2 = W = -\tau_A \cdot \theta_s \Rightarrow \theta_s = \frac{I_0 \omega_s^2}{2 \tau_A} = 17.2 \ rad$$

$$\Rightarrow n_{giri} = \theta_s / 2\pi = 2.74$$

(d) Calcolo del tempo di arresto :

$$\omega = \omega_s - \frac{\tau_A}{I_0} t \Rightarrow t_F = \frac{\omega_s I_0}{\tau_A} = 5.2 \ s$$

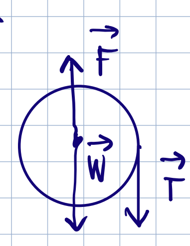
(e) Tensione della fune a partire dalle equazioni del moto :

$$T = m(g-a) = m(g - \alpha R) = 1.16 N.$$

In ogni caso la fune non si rompe perché il carico massimo è quello statico, $T_{max} = mg \cong 1.2 \ N < 10 \ N$.

(f) Se la fune è libera la sua tensione è nulla

(g) Condizione di equilibrio della carrucola



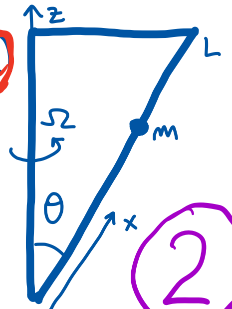
$$F = W + T = 4Mg + m(g-a) = 79.6 \ N$$

(durante la prima fase)

$$F = W = 4Mg = 78.4 \ N$$

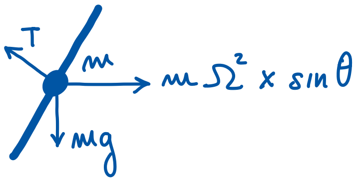
(durante la seconda fase)

a)



2

Nel sistema di riferimento solidale alla struttura rotante:



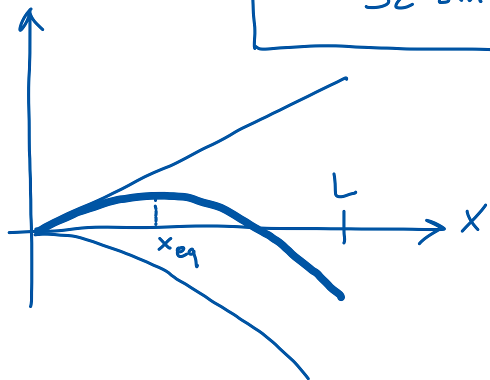
Equazione del moto lungo x

$$m\ddot{x} = m\Omega^2 x \sin^2\theta - mg\cos\theta$$

Posizione di equilibrio quando $\ddot{x}=0 \Rightarrow$ $\boxed{x_{eq} = \dfrac{g\cos\theta}{\Omega^2\sin^2\theta}}$

L'energia potenziale è data da

$$U = mgx\cos\theta - \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 \sin^2\theta$$



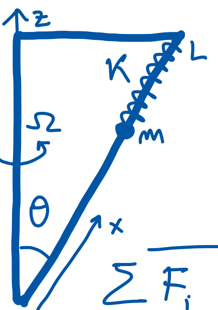
Se $x_{eq} < L$ (ovvero $\Omega^2 > g\cos\theta / L\sin^2\theta$)

in x_{eq} si ha un massimo di U quindi un equilibrio instabile. $x=0$ e $x=L$ sono punti di eq. stabile

Se $x_{eq} > L$, allora U è sempre crescente nell'intervallo $(0,L)$

quindi l'unico punto di equilibrio è $x=0$.

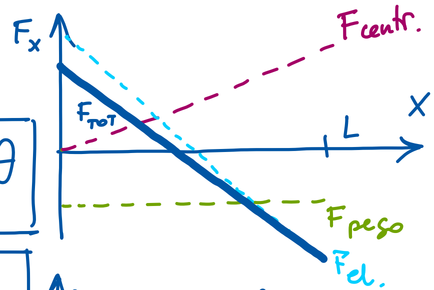
b)



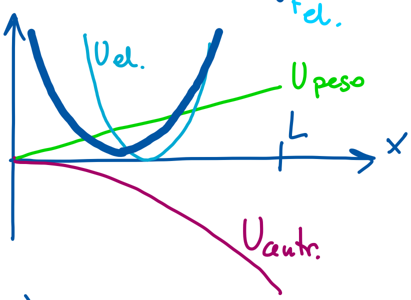
Aggiunta molla con K e $l_0 = L/2$.

Lungo l'asse x ho

$$\boxed{\sum_i F_i = m\Omega^2 x \sin^2\theta - k\left(x - \frac{L}{2}\right) - mg\cos\theta}$$



$$\boxed{U(x) = -\frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2}K\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + mgx\cos\theta}$$



c) Annullando la risultante delle forze si ottiene la posizione di equilibrio (stabile)

$$\boxed{x'_{eq} = \frac{KL/2 - mg\cos\theta}{K - m\Omega^2\sin^2\theta} \simeq 13.6 \text{ cm}}$$

Dal coefficiente lineare in x nella forza o da quello quadratico nell'energia potenziale si ottiene la pulsazione

$$\omega^2 = \left(\frac{K}{m} - \Omega^2\sin^2\theta\right) \longrightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m} - \Omega^2\sin^2\theta} \simeq 3.5 \text{ Hz}}$$

d) All'aumentare di Ω, x'_{eq} si sposta verso l'estremo L.

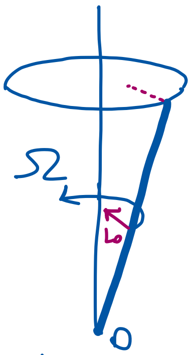
Ω critica si ottiene quando x'_{eq} diventa pari a L

$$\Rightarrow LK - mL\Omega_c^2 \sin^2\theta = \frac{KL}{2} - mg\cos\theta$$

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{\frac{KL}{2} + mg\cos\theta}{mL\sin^2\theta}} \simeq 33.4\ s^{-1} = 5.3\ giri/s$$

e) Rispetto al polo O, il momento angolare $\vec{L}_o$ non è costante. È costante la sua componente lungo z, ma la proiezione orizzontale ruota nel piano con Ω

La direzione del vettore $\vec{L}_o$ è sempre perpendicolare all'asta rotante e giace nel piano formato da asta e asse z.



$$L_o = m\Omega x^2 \sin\theta \qquad \vec{L}_o = m\Omega x^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\phi \\ \cos\theta & \sin\phi \\ \sin\theta & \end{pmatrix}$$

dove $\phi = \Omega t$

La componente L_{oz} che rimane costante è proprio pari a $I_o\Omega$ ($I_o = m x^2 \sin^2\theta$)

f) Dalla seconda eq. cardinale: $\vec{\tau}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = m\Omega^2 x^2 \sin\theta\cos\theta \begin{pmatrix} -\sin\Omega t \\ \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$

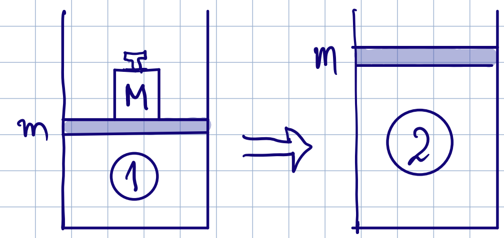
ovvero la coppia di forze che mantiene l'oggetto in rotazione.

3 All'equilibrio $T_1 = T_2$

$$\Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$$

con $P_1 = \frac{(M+m)g}{S} + P_0$

$$P_2 = \frac{mg}{S} + P_0$$



(a) $\Rightarrow V_2 = \frac{(M+m)g/S + P_0}{mg/S + P_0} \cdot V_1 = 1536 \, cm^3$

(b) $T_1 = T_2 \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow Q = L = (mg + P_0 S) \cdot \frac{V_2 - V_1}{S} = 71.4 \, J$

4 Il sistema acqua + ghiaccio + cucchiaino è isolato termicamente

$$\Rightarrow 0 = Q_{TOT} = \underbrace{m_A c_A (T_f - T_A)}_{Q_{acqua}} + \underbrace{2 m_B c_B (T_f - T_B)}_{Q_{cubetti\ sciolti},\ c_B = c_A} + \underbrace{2\lambda m_B}_{Q_{fusione}} + \underbrace{m_c c_c (T_f - T_c)}_{Q_{cucchiaino}}$$

(a) $\Rightarrow c_c = \frac{m_A c_A (T_A - T_f) + 2 m_B c_B (T_B - T_f) - 2\lambda m_B}{m_c (T_f - T_c)} = 480 \, J/_{K \cdot kg}$

(b) $\Delta S_a = m_a c_a \ln \frac{T_f}{T_a} = -44 \, J/_K$

$$\Delta S_b = \frac{2\lambda_f m_B}{T_B} + 2 m_B c_B \ln \frac{T_f}{T_B} = 48.4 \, J/_K + 3.0 \, J/_K = 51.4 \, J/_K$$

$$\Delta S_c = m_c c_c \ln \frac{T_f}{T_c} = -4.9 \, J/K$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_a + \Delta S_B + \Delta S_c = 2.5 \, J/K$$