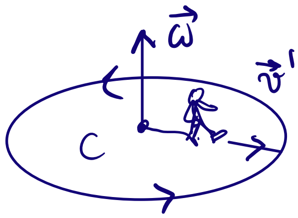
R

Cinematica dei moti relativi

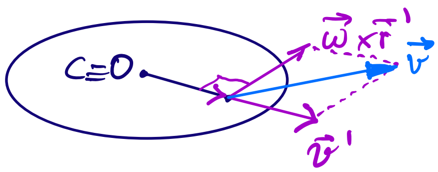
1.



Si usano i due riferimenti
$Oxyz$ (solidale con il terreno)
$O'x'y'z'$ (solidale con la giostra)
e gli assi $z \equiv z'$ sono coincidenti con l'asse di rotazione (direzione di $\vec{\omega}$).

(a)
Moto in $O'x'y'z'$: rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}\,' = \overrightarrow{\text{cost}}$;
moto in $Oxyz$: velocità

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \qquad (\vec{r}\,' \equiv \vec{r})$$



La velocità di trascinamento ha modulo $\omega r' = \omega r$ ed è perpendicolare a $\vec{v}\,'$, per cui

$$v = \sqrt{v'^2 + \omega^2 r^2}\,.$$

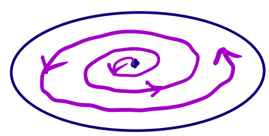
(b)
v' e ωr sono le componenti radiale e trasversale di $\vec{v}\,'$ in un sistema polare di coordinate (r, θ) con centro C, cioè

$$v_r = \dot{r} = v' \quad \text{e} \quad v_\theta = r\dot{\theta} = \omega r\,.$$

La legge oraria è $r(t) = v't$, $\theta(t) = \omega t$ per cui

$$r = \frac{v'}{\omega}\theta$$

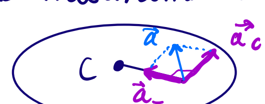
che è una spirale (di Archimede)



(c) rispetto alla giostra $\vec{a}\,' = \vec{0}$ ($\vec{v}\,' = \overrightarrow{\text{costante}}$);
rispetto al suolo

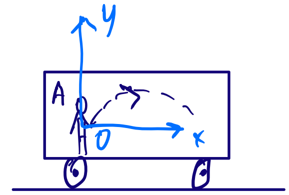
$$\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,').$$

L'accelerazione di trascinamento è centripeta (normale) con modulo $a_T = \omega^2 r$. L'accelerazione complementare (di Coriolis) è perpendicolare a quella di trascinamento con modulo $a_c = 2\omega v'$ (costante).



(d) È sufficiente osservare che sia $\frac{d\vec{v}\,'}{dt}$ che $\frac{d\vec{v}_T}{dt}$ danno un contributo $\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ ciascuno (uno perché $\vec{v}\,'$ cambia direzione, l'altro perché $\vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ cambia modulo con $\vec{r}\,'(t)$).

2. (a) Tutti due i riferimenti sono inerziali (l'equazione del moto non cambia) ma le condizioni iniziali sono differenti:
nel riferimento del vagone la velocità orizzontale è v_{Ax} e dunque la traiettoria è parabolica, in quello della stazione la velocità orizzontale è $v_{Ax} - v = 0$ e dunque la traiettoria è rettilinea verticale.



(b) Nel riferimento del vagone

$$x(t) = v_{Ax} t$$
$$y(t) = v_{Ay} t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

La distanza fra A e B è necessariamente pari alla gittata,

$$d_{AB} = \frac{2 v_{Ax} v_{Ay}}{g} = 2.04\,m$$

(c) durante la frenata il riferimento del vagone non è più inerziale e dunque le leggi orarie diventano

$$x(t) = d_{AB} - v_{Ax} t - \frac{1}{2} a t^2$$
$$y(t) = v_{Ay} t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

La durata di questo secondo lancio è eguale a quella del primo (la velocità verticale è la stessa), $t_V = 2 v_{Ay}/g$.

Quindi $x(t_V) = \cancel{d_{AB}} - \cancel{\frac{2 v_{Ax} v_{Ay}}{g}} - \frac{1}{2} a \cdot \frac{4 v_{Ay}^2}{g^2} = - \frac{2 v_{Ay}^2 a}{g^2} = -0.021\,m$

e dunque la persona a destra dovrà spostarsi di questa quantità per prendere l'oggetto al volo.