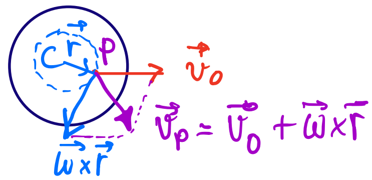
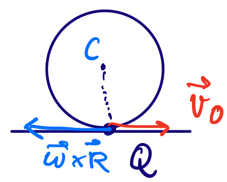
R

Moto di rotolamento puro

(a) composizione vettoriale delle velocità di traslazione e di rotazione

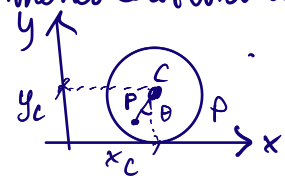


Nel punto di contatto Q:



$|\vec{v}_Q| = |\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{R}| = $
$= v_0 - \omega R = 0$
quando $v_0 = \omega R$.

(b) Coordinate del centro della ruota nel riferimento cartesiano



$$\begin{cases} x_C(t) = v_0 t = \omega R t \\ y_C(t) = R \end{cases}$$

coordinate del punto P

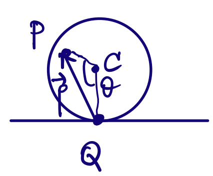
$$x_P(t) = x_C - r\sin\theta = v_0 t - r\sin\omega t = \omega R t - r\sin\omega t;$$
$$y_P(t) = y_C - r\cos\theta = R - r\cos\theta = R - r\cos\omega t.$$

Queste sono leggi orarie parametriche (non invertibili) di una traiettoria detta cicloidale:

(c) $v_{xP} = \dot{x}_P = \omega R - \omega r\cos\omega t$
$v_{yP} = \dot{y}_P = +\omega r\sin\omega t$
e $v = \sqrt{v_{xP}^2 + v_{yP}^2} = \omega\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\omega t}$,

v ha un valore minimo pari a $v_{min} = \omega(R-r)$ quando P è sotto al centro e sulla verticale del punto di contatto Q. Se poi P è sul bordo, $r = R$ e $v_P = v_Q = 0$ (il punto di contatto è fermo). La velocità è massima e vale $v_{max} = \omega(R+r)$ quando P è sopra a C sulla verticale del punto di contatto.

(d) Si studia il moto orario del vettore $\vec{\rho} \equiv \vec{QP}$:



le componenti cartesiane di $\vec{\rho}$ sono

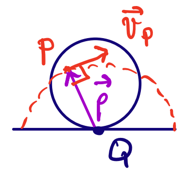
$$\rho_x = -r\sin\theta = -r\sin\omega t$$
$$\rho_y = R - r\cos\theta = R - r\cos\omega t$$

e $|\vec{\rho}| = \sqrt{\rho_x^2+\rho_y^2} = \sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\omega t}$

per cui, confrontando con l'espressione dell'intensità di $\vec{v}$, risulta che $v = \omega\rho$.

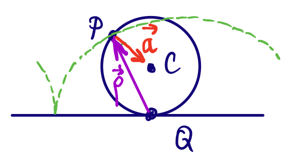
È anche vero che $\vec{v}\cdot\vec{\rho} = 0$, cioè $\vec{v}$ e $\vec{\rho}$ sono vettori sempre perpendicolari:

P si muove con velocità angolare ω sulla circonferenza di raggio ρ e centrata in Q.



(e) $\begin{cases} a_x = \dot{v}_{xP} = \omega^2 r\sin\omega t \\ a_y = \dot{v}_{yP} = \omega^2 r\cos\omega t \end{cases}$ $\qquad a = \sqrt{a_x^2+a_y^2} = \omega^2 r$ (costante).

Si vede che il vettore $\vec{a}$ è costantemente centripeto per la ruota:



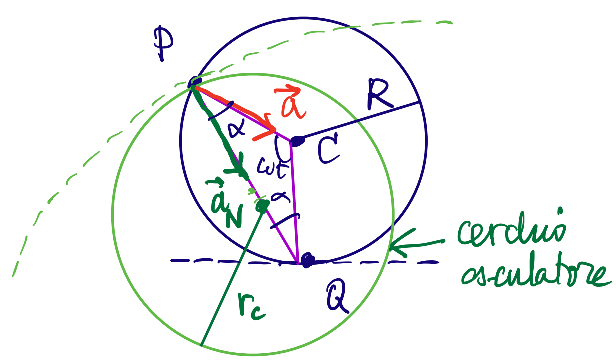
(f) Scrivendo $a_N = \dfrac{v^2}{r_c}$ (r_c è il raggio del cerchio osculatore)

dalla geometria

$$a_N = a\cdot\cos\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega t}{2}$$

$$\Rightarrow a_N = a\sin\frac{\omega t}{2} = \omega^2 R\sin\frac{\omega t}{2}.$$



Ma è anche (per $r=R$)

$v^2 = 2\omega^2R^2(1-\cos\omega t)$ per cui $r_c = \dfrac{v^2}{a_N} = \dfrac{2\omega^2R^2(1-\cos\omega t)}{\omega^2 R\sin\omega t/2}$

che si può anche riscrivere $r_c = 4R\sin\dfrac{\omega t}{2}$.

(g) Ci sono intervalli di tempo nei quali P retrocede.