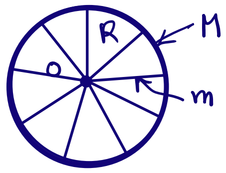
1.

Calcolo del momento di inerzia della ruota riferito all'asse geometrico

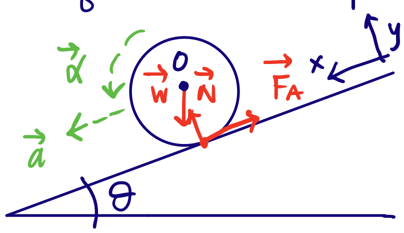


$$I_0 = MR^2 + 9 \times \frac{mR^2}{3} = (M+3m)R^2$$

$$M_{TOT} = M + 9m$$

Raggio giratore $\quad K_0 = \sqrt{I_0 / M_{TOT}} = \sqrt{\frac{M+3m}{M+9m}}\, R$. R non è noto.

Diagramma di corpo libero ed equazioni del moto



$$x: \quad M_{TOT}\, a = W \operatorname{sen}\theta - F_A$$

$$y: \quad 0 = N - W\cos\theta$$

$$z: \quad I_0 \alpha = F_A R$$

Rotolamento puro : $a = \alpha R \Rightarrow F_A = M_{TOT} \frac{K_0^2}{R^2} a$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{R^2}{R^2 + K_0^2}\, g \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta \, \frac{M+9m}{M+6m} \;;$$

(a) $$\boxed{F_A = \frac{K_0^2}{R^2+K_0^2} M_{TOT}\, g \sin\theta = \frac{1}{2}(M+9m)\left(\frac{M+3m}{M+6m}\right) g \operatorname{sen}\theta,}$$

Condizione di sufficiente attrito statico

$$F_A < F_{A,MAX} = \mu N = \mu M_{TOT}\, g \cos\theta \Rightarrow$$

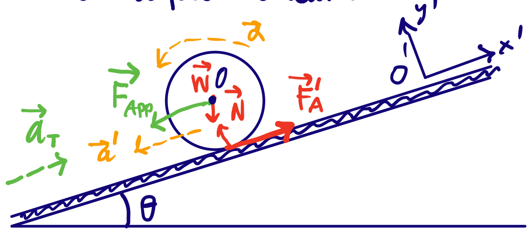
(b) $$\boxed{\mu_{MIN} = \frac{1}{2}\frac{M+3m}{M+6m} \operatorname{tg}\theta \;=\; 0.28}$$

Legge oraria per la velocità di O: $v = at$, con $a = 2.52\ m/s^2 \Rightarrow$

(c) $\boxed{\text{dopo } t = 2\ s \quad v_0 = 5.04\ m/s}$ [il punto di contatto è sempre fermo].

(d) Il lavoro svolto dalla forza di attrito (statica) è nullo perché essa agisce su un punto costantemente in quiete.

Caso del tapis-roulant



Equazione del moto nel riferimento del nastro accelerato:

$$\vec F' = \vec F_A' + \vec N + \vec W + \vec F_{APP} = M_{TOT}\,\vec a'$$

con $\vec F_{APP} = -M_{TOT}\,\vec a_T$

Proiezione lungo x': $-M_{TOT}\, a' = F_A' - M_{TOT}\, g \sin\theta - M_{TOT}\, a_T$,

$$I_0 \alpha' = M_{TOT} K_0^2 \frac{a'}{R} = F_A' R \Rightarrow F_A' = M_{TOT}\, a' \frac{K_0^2}{R^2} \Rightarrow$$

(e) $$\boxed{a' = \frac{1}{2}(g\sin\theta + a_T)\,\frac{M+9m}{M+6m}}$$

Condizione di rotolamento puro assicurata per $F_A' < F_{A,MAX} = \mu M_{TOT}\, g\cos\theta$

dove $F_A' = \frac{1}{2} M_{TOT}(g\sin\theta + a_T)\left(\frac{M+3m}{M+6m}\right) < \mu M_{TOT}\, g \cos\theta$

(f) $$\boxed{\Rightarrow \quad a_T < g\left[2\mu\cdot\frac{M+6m}{M+3m}\cos\theta - \sin\theta\right] = 5.69\ m/s^2}$$

Nel riferimento inerziale $\vec a = \vec a' + \vec a_T$

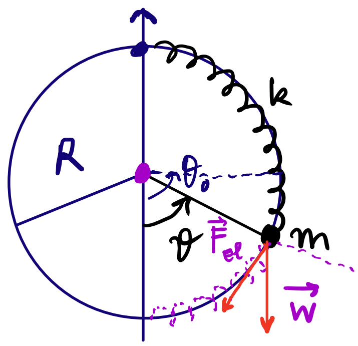
e lungo l'asse x $\quad a = a' - a_T = \frac{1}{2}(g\sin\theta + a_T)\frac{M+9m}{M+6m} - a_T =$

$$= \frac{(M+9m)\,g\sin\theta - (M+3m)\,a_T}{2(M+6m)}.$$

C'è equilibrio traslazionale nel riferimento inerziale quando $a=0$ e quindi

(g) $$\boxed{a_T = \frac{M+9m}{M+3m}\, g\sin\theta = 5.29\ m/s^2}$$

2.



(a) Equazione del moto

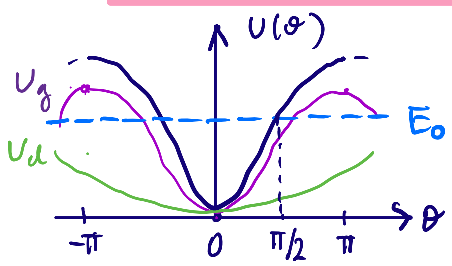
$$m\vec{a} = \vec{W} + \vec{F}_{el} \,;$$

proiezione tangenziale:

$$\boxed{mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - KR\theta}$$

(b) Le forze sono conservative e l'energia potenziale è tale che

$$F_\theta = -\frac{1}{R}\frac{dU}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U(\theta) = U_g(\theta) + U_{el}(\theta) = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}KR^2\theta^2}$$



(c) partenza da ferma in $\theta_0 = \pi/2$; conservazione dell'energia:

$$E = E(\theta) = E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

$$= E_0 = E(\theta_0) = mgR + kR^2\pi^2/8 \,.$$

Come si vede direttamente dal grafico $U(\theta)$, la velocità massima si ha per $\theta = 0$, quando l'energia totale è solo cinetica e quindi

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = mgR + \frac{kR^2\pi^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgR + \frac{kR^2\pi^2}{8}\right)} = 3.75 \text{ m/s}}$$

(d) Per ottenere il risultato è necessario sviluppare in serie di Taylor $U(\theta)$ attorno alla coordinata di equilibrio $(\theta = 0)$ per piccoli angoli:

$$U(\theta) = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 \approx \frac{1}{2}mgR\theta^2 + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 \,; \quad \left(\text{in quanto } \cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2 \text{ per } \theta \ll 1\right)$$

si ottiene quindi un'energia potenziale armonica,

$$U(\theta) \approx \frac{1}{2}mR^2\theta^2\left(\frac{g}{R} + \frac{k}{m}\right)$$

con pulsazione e periodo associati

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{k}{m}} = 16.3 \text{ s}^{-1} \,, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.39 \text{ s}}$$

(e) Nel caso di moto della guida accelerato si deve aggiungere la forza non inerziale alla quale si può associare l'energia potenziale apparente

$$U_A = -m a_T R(1-\cos\theta)$$

(in questo modo si ottiene la forza non inerziale tangenziale

$$F_A = -\frac{1}{R}\frac{dU_A}{d\theta} = m a_T R \sin\theta \quad).$$

L'energia potenziale totale è quindi

$$U'(\theta) = U(\theta) + U_A = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - m a_T R(1-\cos\theta)$$

dove, come richiesto dal testo, $a_T = \left(g + \frac{kR}{m}\right)$, per cui

$$U'(\theta) = -kR^2(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 \approx -kR^2\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}\right) + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 = \frac{kR^2\theta^4}{24}$$

in cui si è dovuto usare l'espansione di $\cos\theta$ fino a θ^4 per l'annullamento del termine θ^2.

Quindi l'energia potenziale ha un minimo attorno a $\theta = 0$ e dunque rappresenta un'oscillazione anche se non armonica.

(f) A partire dall'energia totale in θ_0,

$$E = \frac{kR^2\theta_0^4}{24} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{kR^2\theta_0^4}{12m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{0\,max} = mRv_{max} = R^2\theta_0^2\sqrt{\frac{km}{12}}}$$

3. Il volume iniziale è $V_i = \frac{nRT}{P_i} = \frac{2\ \text{moli} \times 8.31 \frac{J}{mol K} \times 296 K}{2.5 \times 10^5 N/m^2} = 19.7 \times 10^{-3} m^3$;

(a) il volume finale è $\boxed{V_f = \frac{P_i}{P_f} V_i = \frac{2.5}{1.05} \times 19.7 \times 10^{-3} m^3 = 46.9 \times 10^{-3} m^3}$.

(b) Il lavoro di espansione è $\boxed{W_{irrev} = P_{ext} \Delta V = 1.05 \times 10^5 \frac{N}{m^2} \times 27.2 \times 10^{-3} m^3 = 2.85\ kJ}$

Il gas subisce un'espansione irreversibile: lungo un'isoterma si

(c) calcola $\boxed{\Delta S_{gas} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = 14.4\ J/K}$

Il calore sottratto all'ambiente è $Q = W_{irrev}$ per cui $\Delta S_{amb} = -\frac{W_{irrev}}{T}$

$\boxed{\Delta S_{amb} = -9.63\ J/K \quad e \quad \Delta S_u = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = 4.77\ J/K}$.

(d) Il lavoro reversibile è $\boxed{W_{rev} = Q = \int P dV = nRT \ln V_f/V_i = 4.27\ kJ}$

4. Se il contenitore è adiabatico la temperatura finale dell'acqua si ottiene dall'espressione per l'energia termica,

$$C \Delta T = c\, m\, \Delta T = E_{molla}$$

$$\Rightarrow \quad T_f = T_i + \frac{E_{molla}}{c \cdot m} = 283 K + \frac{2800 J}{0.1\ kg \times 4186\ J/kg K} = 289.7\ K = 16.6\ °C$$

In questo caso l'entropia dell'universo varia solo a causa del cambiamento di stato dell'acqua che, secondo un processo reversibile che collega T_i a T_f dà la variazione

(a) $\boxed{\Delta S_u = \Delta S_{acqua} = m c \ln \frac{T_f}{T_i} = 9.78\ J/K}$

Nel caso del contenitore diatermico, l'acqua non cambia il suo stato termodinamico perché è alla stessa temperatura dell'aria esterna. Dunque l'universo cambia la sua entropia a causa del calore immesso nell'atmosfera:

(b) $\boxed{\Delta S_u = \Delta S_{aria} = \frac{Q}{T_{aria}} = \frac{E_{molla}}{T_{aria}} = 9.89\ J/K}$