1.

(a) Il caso della lastra-molla è standard e si ottiene subito che il periodo di oscillazione è dato da

$$T = 2\pi\sqrt{M/k}.$$

(b) Posta x_0 la lunghezza di riposo delle molla e x_i la posizione iniziale della lastra, per una posizione arbitraria x la conservazione dell'energia meccanica si scrive

$$\frac{1}{2}k(x_i-x_0)^2 = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove si introducono le energie cinetiche della lastra e del cilindro.
In questo caso il momento d'inerzia del cilindro si scrive

$$I = \frac{1}{2}m(R^2+r^2)$$

e, per la condizione di puro rotolamento, è $\omega = v/R$ per cui

$$\frac{1}{2}k(x_i-x_0)^2 = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}v^2\left[M+\frac{m}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)\right].$$

Si deriva rispetto al tempo osservando che $\dot{x} = v$ e $\frac{d(v^2)}{dt} = 2v\frac{dv}{dt} = 2v\cdot a$:

$$0 = kv(x-x_0) + v\cdot a\left[M+\frac{m}{2}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)\right]$$ da cui l'accelerazione:

$$a = -\frac{k(x-x_0)}{M+\frac{m}{2}(1+r^2/R^2)}$$

che corrisponde all'accelerazione di un moto armonico semplice con periodo

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{m}{2}(1+r^2/R^2)}{k}};$$

(c) $$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{M+\frac{m}{2}(1+r^2/R^2)}{M}} = \sqrt{1+\frac{f}{2}(1+q^2)}$$ con $f = m/M$, $q = r/R$.

(d) L'accelerazione è massima proprio in corrispondenza con l'istante in cui la lastra è lasciata libera di muoversi perché parte da ferma:

$$|a_{MAX}| = \frac{k l_0}{M + \frac{m}{2}(1+q^2)} = \frac{85 \frac{N}{m} \times 8\times10^{-2} m}{5 \, kg + \frac{8 \, kg}{2}(1+0.3^2)} = 0.73 \, m/s^2$$

(e) La condizione perché vi sia rotolamento puro è che l'attrito statico nel punto di contatto nell'istante di massima accelerazione non superi l'attrito statico limite.

Dall'equazione cardinale

$$I\alpha = F_A \cdot R \Rightarrow F_A = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I a}{R^2} = \frac{m}{2}(1+q^2) a$$

e deve risultare sempre

$$F_A < F_{A,MAX} = \mu_s N = \mu_s m g$$

per cui

$$\mu_s > \frac{F_A}{m g} = \frac{a}{2g}(1+q^2)$$

Preso il valore massimo dell'accelerazione calcolato nel punto (d):

$$\mu_s > \frac{a_{max}}{2g}(1+q^2) = \frac{0.73 \, m/s^2}{2 \cdot 10 \, m/s^2}(1+0.3^2) = 0.039.$$

(f) In generale

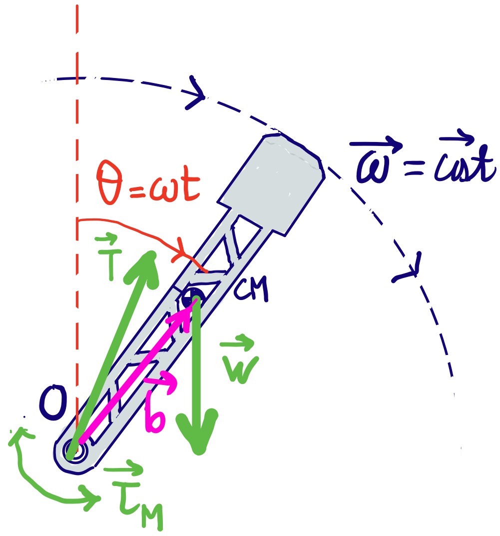
$$\mu_{MIN} = \frac{a_{MAX}}{2g}(1+q^2) = \frac{1}{g} \frac{k l_0 (1+q^2)}{2M + m(1+q^2)}.$$

Per il cilindro cavo $q=1 \Rightarrow \mu_{min} = \frac{1}{g} \frac{k l_0}{M+m} = 0.052$

per il cilindro pieno $q=0 \Rightarrow \mu_{min} = \frac{1}{g} \frac{k l_0}{2M+m} = 0.038$

2.

(a) Equazioni cardinali



$$\vec{F}^{(TOT)} = \vec{T} + \vec{P} = M\vec{a}_{cm}$$
$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_M + \vec{b} \times \vec{P} = I_O \vec{\alpha}$$

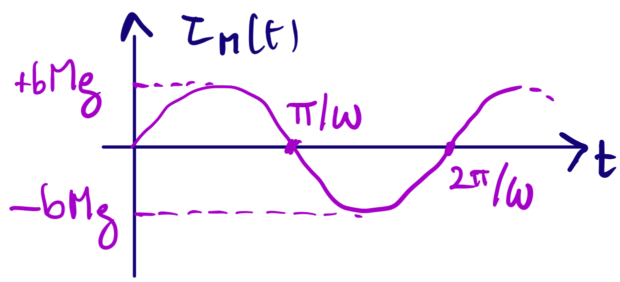
Siccome $\vec{\omega}$ è un vettore costante allora $\vec{\alpha} = \vec{0}$ e l'equazione cardinale rotazionale prevede che si annulli il momento risultante in O:

$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_M + \vec{b} \times \vec{P} = \vec{0} \quad \text{ovvero} \quad \vec{\tau}_M = -\vec{b} \times \vec{P}$$

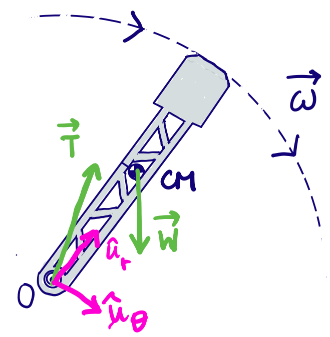
(b) Quindi l'intensità del momento generato dal motore è sempre tale da compensare quella del momento generato dalla forza peso riferita allo stesso polo ed è data da

$$\tau_M(t) = bP \operatorname{sen}\theta = bMg \operatorname{sen}\omega t$$

con andamento sinusoidale



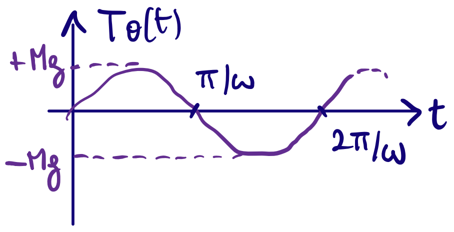
(c) Proiezioni dell'equazione cardinale del moto del CM secondo le direzioni parallela (radiale) e perpendicolare (trasversa) alla congiungente O-CM:

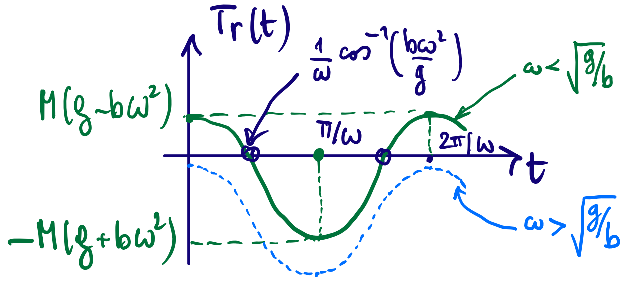


$$\hat{u}_r: \quad T_r - P\cos\vartheta = -Mb\omega^2$$
$$\hat{u}_\theta: \quad -T_\theta + P \operatorname{sen}\vartheta = Mb\ddot{\vartheta} = 0$$

ovvero
$$T_r(t) = M(g\cos\omega t - b\omega^2)$$
$$T_\theta(t) = Mg \operatorname{sen}\omega t$$

con andamenti

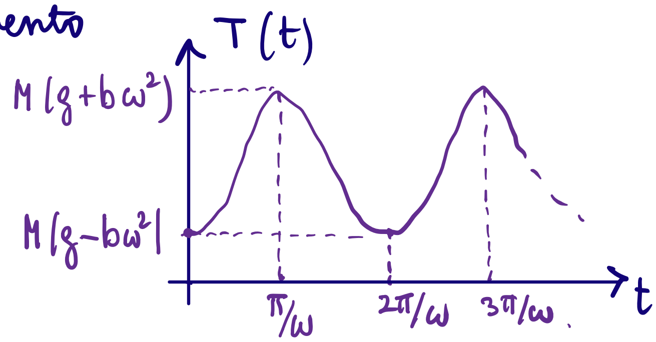




(d) Il modulo della reazione vincolare si ottiene dalla

$$T=\sqrt{T_r^2+T_\theta^2}=M\sqrt{|g^2+\omega^4 b^2-2g\omega^2 b\cos\omega t|}$$

con andamento



(e) Perché si annulli solamente la componente parallela (T_r) e resti quella perpendicolare (T_θ) deve comunque essere

$$\omega \le \sqrt{g/b}$$

e T_r si annulla per $t=\frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{b\omega^2}{g}\right)$ e multipli.

Se $\omega\le\sqrt{g/b}$ il vincolo continua a cambiare segno;

se $\omega>\sqrt{g/b}$ il vincolo è costantemente di segno negativo.

(f) Per calcolare il lavoro eseguito dal motore nel mezzo giro della struttura si può utilizzare la

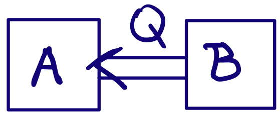
$$W=\int \tau_m\, d\theta=-bMg\int_{\pi}^{2\pi}\sin\theta\, d\theta=2bMg=9.6\times10^4\,J$$

La potenza si ottiene dalla $P=W/t$, $t=\pi/\omega$, $\omega=4\pi$ rad/min $=\frac{4\pi}{60}$ rad/s

$$\Rightarrow t=\frac{\pi}{4\pi/60}\,s=15\,s \Rightarrow P=\frac{9.6\times10^4\,J}{15\,s}=6.4\ kW$$

3.

(a) La temperatura di equilibrio T_e si ottiene dalla conservazione dell'energia applicata allo scambio termico fra i due oggetti:



$$T_A^i = 20°C = 293K$$
$$T_B^i = 80°C = 353K$$

$$C(T_e - T_B^i) = C(T_A^i - T_e) \Rightarrow T_e = \frac{T_A^i + T_B^i}{2} = 323K = 50°C.$$

(b) Ancora per la conservazione dell'energia, essendo il sistema isolato,

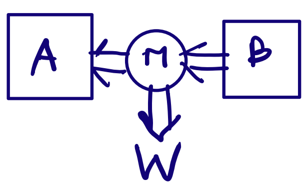
$$\Delta U_{TOT} = \Delta U_A + \Delta U_B = Q_A + Q_B = 0.$$

(c) Per il calcolo di ΔS si considerano processi reversibili che connettono gli stessi stati iniziali e finali,

$$\Delta S_s = \Delta S_A + \Delta S_B = C \ln \frac{T_e}{T_A^i} + C \ln \frac{T_e}{T_B^i} = 1.3\ J/K.$$

(d) la variazione di entropia dell'universo è uguale a quella del sistema perché quest'ultimo è isolato.

(e)



Siccome il motore M è reversibile la variazione di entropia dell'universo è nulla.

Chiamando T_e' la nuova temperatura di equilibrio allora

$$\Delta S_u = C \ln \frac{T_e'}{T_A^i} + C \ln \frac{T_e'}{T_B^i} = 0 \Rightarrow T_e' = \sqrt{T_A^i T_B^i} = 322K = 49°C.$$

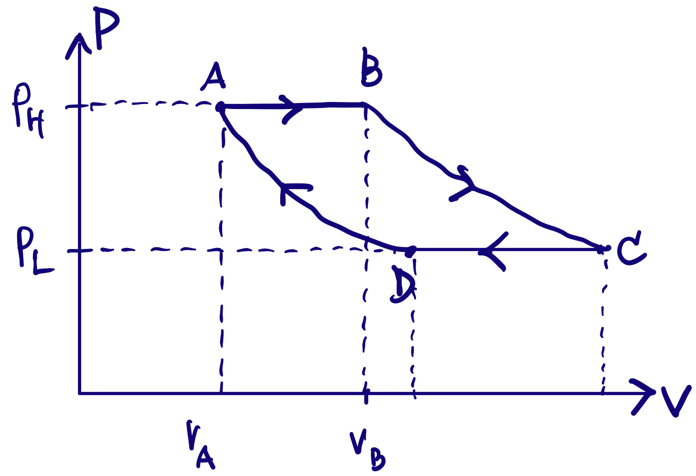
(f) Il lavoro prodotto si ottiene dal I principio:

$$W = |Q_B| - |Q_A| = C(T_B^i - T_e') - C(T_e' - T_A^i) = C(T_A^i + T_B^i - 2T_e') = 300J.$$

(g) L'energia interna varia secondo la $\Delta U = -W = -300\ J$.

4.

(a)



(b) Il calore è assorbito solamente lungo l'espansione $A \to B$ e vale

$$Q_{AB} = n c_p (T_B - T_A)$$

dove $T_A = \dfrac{P_H V_A}{nR}$, $T_B = \dfrac{P_H V_B}{nR} = 2T_A$

$$\Rightarrow Q_{AB} = n c_p T_A = \frac{c_p}{R} P_H V_A = \begin{cases} \frac{5}{2} P_H V_A = 700 \text{ l·atm} = 71 \text{ kJ (monoat)} \\ \frac{7}{2} P_H V_A = 980 \text{ l·atm} = 100 \text{ kJ (biat.)} \end{cases}$$

(c) Rendimento $\eta = \dfrac{W}{Q_{IN}} = \dfrac{Q_{TOT}}{Q_{IN}} = \dfrac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 + \dfrac{Q_{CD}}{Q_{AB}}$

con $Q_{CD} = n c_p (T_D - T_C) = n c_p \cdot \left[\left(\dfrac{P_L}{P_H}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_A - \left(\dfrac{P_L}{P_H}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_B \right] =$

$= n c_p (T_A - T_B)(P_L/P_H)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ con $Q_{AB} = n c_p (T_B - T_A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \left(\frac{P_L}{P_H}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \begin{cases} 1-(1/2)^{2/5} = 0.24 \text{ (monoat.)} \\ 1-(1/2)^{2/7} = 0.18 \text{ (biat.)} \end{cases}$$

(d) La temperatura minima è raggiunta nello stato D.
Lungo l'adiabatica si ha che $T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante}$ per cui

$$T_D P_L^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_A P_H^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad T_D = T_A \cdot \left(\frac{P_L}{P_H}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

dove $\dfrac{\gamma-1}{\gamma} = \begin{cases} 2/5 \text{ (monoat.)} \\ 2/7 \text{ (biat.)} \end{cases}$ e $\dfrac{P_L}{P_H} = \dfrac{1}{2}$.

Posto $n = 8$ è $T_A = \dfrac{P_H V_A}{nR} = 426 \text{ K}$ e $T_D = \begin{cases} T_A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} = 323 \text{ K (monoat.)} \\ T_A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{7}} = 350 \text{ K (biat.)} \end{cases}$