1. Per ottenere le varie grandezze richieste è necessario conoscere la massa del blocchetto di metallo. A questo scopo è sufficiente utilizzare il dato che assegna la variazione di entropia dell'universo.

Ci sono tre fasi: (1) riscaldamento iniziale del metallo da T_0 a T_C
(2) fusione del metallo a T_C
(3) riscaldamento del metallo fuso da T_C a T_F.

(1) calore richiesto $Q_1 = m c_M (T_C - T_0)$

variazione di entropia: del forno $-Q_1/T_F$

del metallo $m c_M \ln(T_C/T_0)$

dell'universo $\Delta S_1 = -Q_1/T_F + m c_M \ln \frac{T_C}{T_0}$

(2) calore richiesto $Q_2 = m \lambda_F$

variazione di entropia: del forno $-Q_2/T_F$

del metallo $+Q_2/T_C$

dell'universo $\Delta S_2 = Q_2\left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_F}\right)$

(3) calore richiesto $Q_3 = m c_M (T_F - T_C)$

variazione di entropia: del forno $-Q_3/T_F$

del metallo $m c_M \ln(T_F/T_C)$

dell'universo $\Delta S_3 = -Q_3/T_F + m c_M \ln \frac{T_F}{T_C}$

Variazione totale di entropia dell'universo $\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$

da cui, invertendo l'espressione e aggiustando i termini,

$$m = \frac{\Delta S_u}{c_M\left(\ln \frac{T_F}{T_0} + \frac{T_0}{T_F} - 1\right) + \lambda_F\left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_F}\right)} = 0.5 \text{ kg}$$

per cui, usando le espressioni già ottenute sopra,

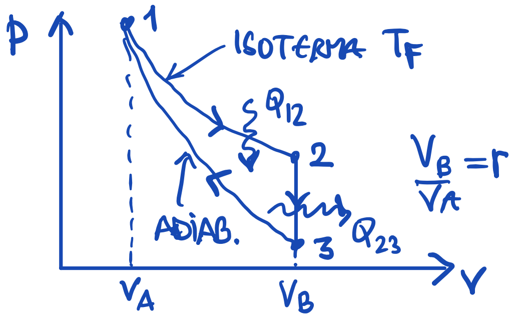
(a) $Q_1 = 341$ KJ

(b) $\Delta S^{(1)}_{FORNO} = -Q_1/T_F = -150$ J/K

(c) $\Delta S_2 = Q_2\,(1/T_C - 1/T_F) = +1.85$ J/K

(d) $Q_3 = 104$ KJ

(e) $\Delta S^{(3)}_{METALLO} = m c_M \ln(T_F/T_C) = +51$ J/K



$\frac{V_B}{V_A} = r$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 7/5$

$Q_{12} = W_{12} = nRT_F \ln(V_B/V_A) > 0$

$Q_{23} = \Delta U_{23} = n c_v (T_3 - T_F) < 0$

ADIABATICA: $T_3 V_B^{\gamma-1} = T_F V_A^{\gamma-1}$

$\Rightarrow T_3 = T_F \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_F r^{1-\gamma}$

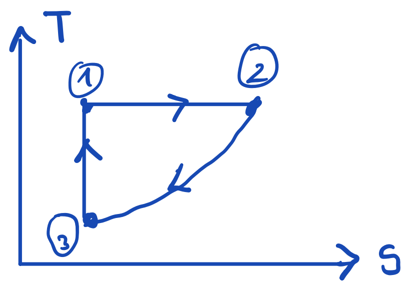
$\Rightarrow Q_{23} = n c_v T_F \left(r^{1-\gamma} - 1\right)$.

Rendimento $\eta = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{n c_v T_F \left(1 - r^{1-\gamma}\right)}{nR\, T_F \ln r} \Rightarrow$

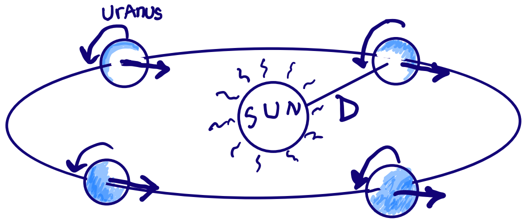
(f) $\eta = 1 - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1 - r^{1-\gamma}}{\ln r} = 0.13$

(g) $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_3}{T_F} = 1 - r^{1-\gamma} = 0.24 > \eta$ (teorema di Carnot)

(h)



(2)

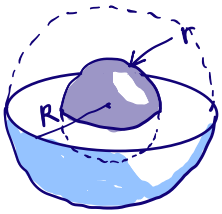


Periodi assegnati di rotazione e rivoluzione:

$$T_g = 0.72 \times 24\ h = 6.2 \times 10^4 s$$

$$T_r = 84\ a = 2.7 \times 10^9 s$$

L'unica forza agente è quella newtoniana fra il Sole e Urano e ha come effetto il mantenimento del pianeta in orbita (circolare): non può far cambiare l'orientazione dell'asse di rotazione giornaliera perché è una forza centrale e il momento angolare intrinseco è non nullo: questo implica un effetto di stabilizzazione giroscopica.



$R = 2.5 \times 10^7 m$, $r = 8.5 \times 10^6 m$

Nucleo: $M_n = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_n = 2.3 \times 10^{25} kg$

Buccia: $M_b = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)\rho_b = 6.3 \times 10^{25} kg$

(a) massa del pianeta $M = M_n + M_b = 8.5 \times 10^{25} kg$

(b) dalla legge di Newton gravitazionale

$$F = m\Omega^2 D = G\frac{m M_S}{D^2} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{G M_S}{\Omega^2}}$$

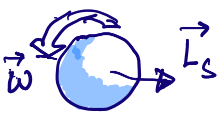
con $\Omega = \frac{2\pi}{T_r} = \frac{2\pi}{2.7 \times 10^9 s} = 2.4 \times 10^{-9} \frac{rad}{s} \Rightarrow D = 2.9 \times 10^{12} m$

(c) serve il momento di inerzia per il calcolo del momento angolare.

Nucleo: $I_n = \frac{2}{5} M_n r^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}\pi \rho_n r^5 = \frac{8}{15}\pi \rho_n r^5 = 6.7 \times 10^{38}\ kg\ m^2$;

buccia: $I_b = \frac{2}{5}\rho_b \cdot \frac{4}{3}\pi (R^5 - r^5) = \frac{8}{15}\pi \rho_b (R^5 - r^5) = 1.6 \times 10^{40}\ kg\ m^2$

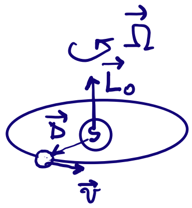
$$\Rightarrow I_{TOT} = I_n + I_b = \frac{8}{15}\pi\left[\rho_n r^5 + \rho_b (R^5 - r^5)\right] = 1.7 \times 10^{40}\ kg\ m^2$$



"Spin" (momento polare) $|\vec{L}_s| = L_s = I_{TOT}\omega$

con $\omega = \frac{2\pi}{T_g} \Rightarrow L_s = \frac{16\pi^2}{15}\frac{1}{T_g}\left[\rho_n r^5 + \rho_b (R^5 - r^5)\right] = 1.7 \times 10^{36}\ kg\ m^2/s$

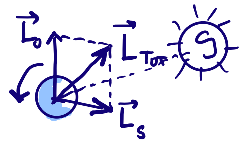
(d)



Momento orbitale $|\vec{L}_o| = L_o = M D^2 \Omega = M D^2 \cdot 2\pi / T_r$;

$$L_o = 1.7 \times 10^{42}\ kg\ m^2/s.$$

(e) Il momento totale ha orientazione fissa.



Il disegno NON è in scala perchè $L_s \ll L_0$

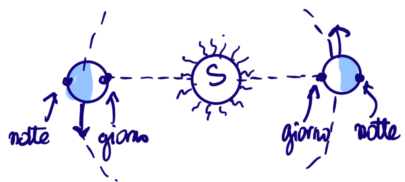
(f) Dall'espressione dell'energia cinetica di un corpo rigido in roto-traslazione

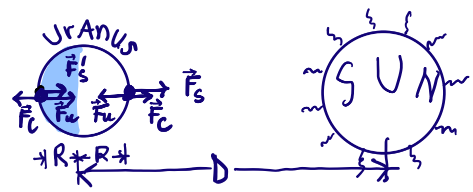
$$E_K = \frac{1}{2} I_{TOT}\,\omega^2 + \frac{1}{2} M D^2 \Omega^2 = 2.2\times10^{33}\ \mathrm{J}$$

(g) Ai poli del pianeta l'unica accelerazione è quella di gravità locale data da

$$mg = \frac{G m M}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2} = 9.2\ \mathrm{m/s^2}$$

(h) Variazione massima dell'accelerazione di gravità all'equatore in corrispondenza delle posizioni del pianeta raffigurate:





giorno: $mg = F_U - F_S - F_c = G\frac{mM}{R^2} - G\frac{mM_S}{(D-R)^2} - m\omega^2 R$

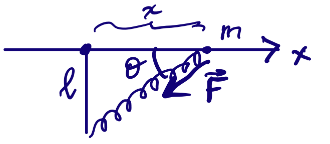
notte: $mg' = F_U + F_S' - F_c = G\frac{mM}{R^2} + \frac{GmM_S}{(D+R)^2} - m\omega^2 R$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_{min} = g_{giorno} = \underset{\sim 9.2\,\mathrm{m/s^2}}{GM/R^2} - \underset{\sim 1.6\times10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}}{GM_S/(D-R)^2} - \underset{\sim 0.3\,\mathrm{m/s^2}}{\omega^2 R} \\ g_{max} = g_{notte} = \underset{\sim 9.2\,\mathrm{m/s^2}}{GM/R^2} + \underset{\sim 1.6\times10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}}{GM_S/(D+R)^2} - \underset{\sim 0.3\,\mathrm{m/s^2}}{\omega^2 R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta g = g_{notte} - g_{giorno} = GM_S\left[\frac{1}{(D-R)^2} + \frac{1}{(D+R)^2}\right] \underset{R \ll D}{\simeq} \frac{2GM_S}{D^2} \simeq 3.2\times10^{-5}\ \mathrm{m/s^2}$$

③

(a) Nel moto l'energia meccanica è conservata: la velocità è massima con l'energia cinetica e questo accade quando la molla è allungata al minimo, ovvero quando l'energia potenziale elastica è minima:



$$E_{TOT} = \frac{1}{2}k(\ell^2 + x_0^2) = \frac{1}{2}k\ell^2 + \frac{1}{2}m v_{max}^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{max} = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} \; .$$

(b) $|\vec{F}| = k\sqrt{\ell^2+x^2}$, $F_x = -|\vec{F}|\cos\theta = -|\vec{F}|\frac{x}{\sqrt{\ell^2+x^2}} = -kx$

$\Rightarrow$ è un moto armonico semplice con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m}$.

(c) Le leggi orarie si ottengono a partire dalla $x(t) = x_0\cos(\omega t + \phi)$ con $x(0) = x_0 = x_0\cos\phi \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow$

$$x = x_0 \cos\omega t$$
$$\dot{x} = -\omega x_0 \sin\omega t$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 \cos\omega t$$

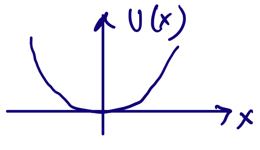
(d) se la lunghezza a riposo della molla è non nulla e pari a ℓ allora l'equazione del moto diventa

$$m\ddot{x} = F_x = -|\vec{F}|\cdot\cos\theta = -k\left(\sqrt{\ell^2+x^2}-\ell\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{\ell^2+x^2}} = -kx\left(1-\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+x^2}}\right)$$

Quindi non si tratta di un moto armonico semplice (la forza non è lineare nella deformazione x).

(e) L'energia potenziale diventa, a meno di una costante additiva,

$$U(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+\ell^2}-\ell\right)^2$$



che ha un andamento qualitativo come nel disegno: il moto è oscillatorio non armonico attorno a $x=0$;

(f) la velocità massima si ottiene ora da: $\frac{1}{2}m v'^2_{max} = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x_0^2+\ell^2}-\ell\right)^2$

$$\Rightarrow \quad v'_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\sqrt{x_0^2+\ell^2}-\ell\right)$$

(g) valori numerici: $v_{max} = 5.5\ m/s$, $v'_{max} = 2.0\ m/s$