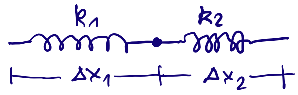
1

(a) Costruzione della molla equivalente alle due molle in serie:

Le deformazioni si sommano,

$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

e la forza elastica è la stessa:



$$F = k_1\Delta x_1 = k_2 \Delta x_2 = k_{TOT}\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{k_{TOT}} = \Delta x_1+\Delta x_2 = \frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2} \Rightarrow k_{TOT} = \frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)}$$

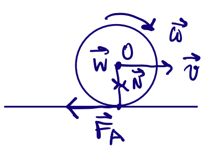
Applicazione del teorema energia cinetica – lavoro

$$\Delta E_{K_M} = \frac12 M v_0^2 = \frac12 k_{TOT}\Delta x^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k_{TOT}}{M}}\,\Delta x = \sqrt{\frac{k_1k_2}{M(k_1+k_2)}}\,\Delta x$$

(b) L'urto è collineare ed elastico tra masse eguali per cui il carrello si ferma e il cilindro si muove con la stessa velocità v_0 di moto traslatorio:

$v_1 = v_0$

(c) Si utilizzano le equazioni cardinali sul cilindro quando entra nel tratto ruvido



$$\begin{cases} M\vec a = \vec F_A + \vec W + \vec N \\ I_0\vec\alpha = \vec R\times\vec F_A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma = -\mu N \Rightarrow a = -\mu g \\ MK^2\alpha = RF_A = \mu RMg\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\mu R}{K^2}\, g$$

Si deve determinare il raggio giratore K. Il momento di inerzia del cilindro cavo di raggi esterno R e interno r rispetto l'asse centrale è

$$I_0 = \frac M2 (R^2+r^2) \;;\quad \text{qui } R=\frac L2 \text{ e } r = \frac L4 \Rightarrow I_0 = \frac M2\left(\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{16}\right) = \frac{5}{32}ML^2 \Rightarrow K^2 = \frac{5}{32}L^2.$$

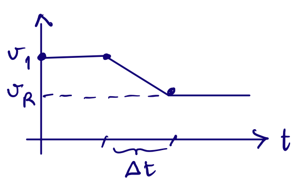
Le leggi orarie di traslazione e rotazione sono

$$v = v_1 + at = v_0 - \mu g t$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \frac{\mu R}{K^2} g t = \frac{16}{5}\frac{\mu g}{L} t$$

La condizione di puro rotolamento inizia all'istante t_R tale che $v(t_R) = \omega(t_R)\cdot R$

$$\Rightarrow v_0 - \mu g t_R = \frac{16}{5}\frac{\mu g}{L}\frac L2 t_R = \frac85 \mu g t_R \Rightarrow t_R = \Delta t = \frac{5}{13}\frac{v_1}{\mu g} \quad (v_1 = v_0)$$

(d)



con $v_R = v(t_R) = \frac{8}{13} v_1$

(e)
$$\Delta E_K = E_{K_f} - E_{K_i} = \frac12 M v_R^2 + \frac12 I_0\omega_R^2 - \frac12 M v_1^2 = \frac12 M v_R^2\left[1+\frac{K^2}{R^2}\right] - \frac12 M v_1^2 = -\frac{5}{26}Mv_1^2$$
$$= \frac12 M\cdot\frac{64}{169}v_1^2\cdot\frac{13}{8} - \frac12 M v_1^2 = \frac12 M v_1^2\left[\frac{8}{13}-1\right] = -\frac{5}{26}Mv_1^2$$

(f) Il lavoro dell'attrito è $W_{ATTR} = \Delta E_K$

(g) Numericamente $v_0 = 1.85$ m/s, $\Delta t = 0.71$ s, $\Delta E_K = -0.20$ J

(h) Si applica la conservazione dell'energia totale del sistema nel passaggio da pura traslazione a puro rotolamento:

$$E_i = \frac{1}{2} M v_1^2 + M c_f T_i + C_p T_i$$
$$E_f = \frac{1}{2} M v_R^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega_R^2 + M c_f T_f + C_p T_f$$

$$\Rightarrow \quad T_i (M c_f + C_p) = T_f (M c_f + C_p) + \Delta E_K$$

$$\Rightarrow \quad T_f = T_i - \frac{\Delta E_K}{M c_f + C_p} \qquad (\text{con } \Delta E_K < 0 \text{, per cui } T_f > T_i)$$

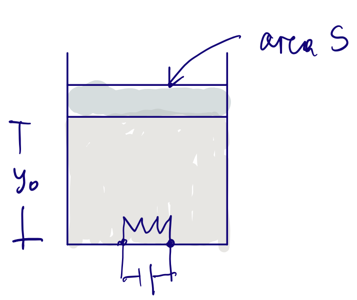
(i) $$\Delta S_{univ} = \Delta S_p + \Delta S_{AL} = C_p \ln \frac{T_f}{T_i} + M c_f \ln \frac{T_f}{T_i} = (M c_f + C_p) \ln \left(1 - \frac{\Delta E_K}{T_i (M c_f + C_p)}\right) ;$$

(j) se, com'è realistico aspettarsi, $C_p \gg M c_f$ e $C_p \gg \Delta E_K$, allora

$$\Delta S_{univ} \cong - \frac{\Delta E_K}{T_i}$$

Numericamente $$\Delta S_{univ} = \frac{0.20\,J}{293\,K} = 6.8 \times 10^{-4}\, J/K$$

②



Data la condizione di equilibrio termodinamico (meccanico e termico) il risultante delle forze sul pistone deve essere nullo:

$$Mg = p \cdot S \quad , \; p = \frac{nRT_i}{V_i} = \frac{nRT_i}{S y_0}$$

(a) $\Rightarrow \; M = \dfrac{nRT_i}{y_0 \cdot g} = \dfrac{4\,\text{mol} \times 8.3\ \text{J/mol K} \times (80+273)\,\text{K}}{3.0\,\text{m} \times 9.8\ \text{m/s}^2} = 399\,\text{kg}$

(b) La trasformazione è reversibile e dunque passa attraverso stati di equilibrio e la forza risultante sul pistone continua a essere nulla. Dunque la pressione del gas è costante e il processo è isobaro. Siccome vale anche la condizione di equilibrio termico si ha che

$$Q = n c_p (T_f - T_i) + Mc\,(T_f - T_i)$$

$$\Rightarrow T_f = T_i + \frac{Q}{n c_p + Mc} = 80°C + \frac{1800 \times 4.18\ \text{J}}{4\,\text{mol} \times \frac{5}{2} \times 8.31\ \frac{\text{J}}{\text{mol K}} + 399\,\text{kg} \times 0.2\ \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 126°C$$

(c) Essendo $p = \text{cost} \Rightarrow W_{gas} = p\,\Delta V = nR\,\Delta T = 4\,\text{mol} \times 8.31\ \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \times 46\,\text{K} = 1.54\,\text{J}$

(d) La trasformazione è reversibile e quindi

$$\begin{cases} \Delta S_{gas} = \int \frac{\delta Q_{gas}}{T} = \int \frac{n c_p\, dT}{T} = n c_p \ln \frac{T_f}{T_i} \\ \Delta S_{pistone} \int \frac{\delta Q_{pistone}}{T} = \int \frac{cM\,dT}{T} = cM \ln \frac{T_f}{T_i} \end{cases} \Rightarrow \Delta S_{sist} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{pistone} = (n c_p + cM) \ln \frac{T_f}{T_i} =$$

$$= \left[4\,\text{mol}\ \frac{5}{2} \times 8.31\ \frac{\text{J}}{\text{mol K}} + 0.2\ \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \times 399\,\text{kg}\right] \ln(1.13) = $$

$$= 20\ \text{J/K}$$

(e) Siccome $\Delta S_u = 0$ e $\Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{risc} \Rightarrow \Delta S_{risc} = -20\ \text{J/K}$

(f)

(g) Gli stati iniziale e finale del sistema (gas+pistone) sono gli stessi di prima, per cui ΔS_{gas} non cambia. Il sistema di riscaldamento rimane alla temperatura T_f e quindi $\Delta S_{risc} = -\dfrac{Q}{T_F} = -\dfrac{1800 \times 4.18\ \text{J}}{(273+126)\,\text{K}} = -18.9\ \text{J/K} \Rightarrow \Delta S_{univ} = 1.1\ \text{J/K}$