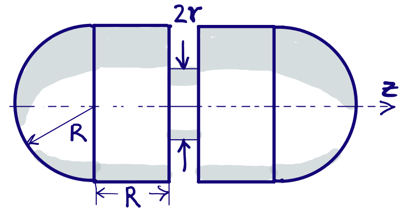
(1)

(a) Calcolo del momento di inerzia dello yo-yo attorno all'asse z.



Il sistema equivale per questo calcolo a una sfera di raggio R e a un cilindro coassiale di eguale raggio e altezza 2R (il cilindretto centrale ha massa trascurabile).

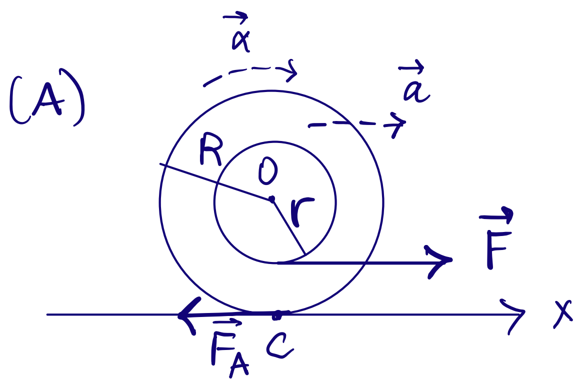
Siano $m_S = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ e $m_C = \pi R^2 \cdot (2R)\rho$ le masse della sfera e del cilindro di eguale densità ρ.

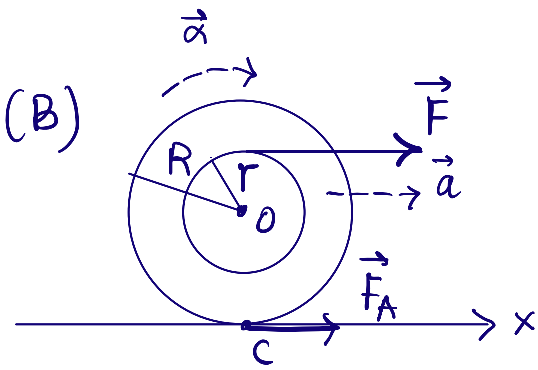
Allora $I_z = \frac{2}{5} m_S R^2 + \frac{1}{2} m_C R^2 = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 + \pi\rho R^5 = \frac{23}{15}\pi\rho R^5$.

La massa totale (nota) è $M = m_S + m_C = \frac{10}{3}\pi R^3 \rho \Rightarrow \pi R^3 \rho = \frac{3M}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow I_z = \frac{23}{15}\cdot\frac{3}{10} M \cdot R^2 = \frac{23}{50} M R^2 \equiv M K_0^2$ ($k_0 = \sqrt{\frac{23}{50}}\,R$ è il raggio giratore).

(b) Studio delle equazioni cardinali per il puro rotolamento nei casi richiesti.





È conveniente il punto C (istantaneamente fermo) per esprimere la seconda equazione cardinale.

(A)

$\tau_C = (R-r)F = I_C\alpha = MK_C^2 \frac{a}{R}$

con $K_C^2 = K_0^2 + R^2$ (Steiner)

risolvendo per l'accelerazione

$\Rightarrow a = \frac{F}{M}\frac{R(R-r)}{K_0^2+R^2}$

e $Ma = F - F_A \Rightarrow$

$F_A = F - Ma =$

$= F\left[\frac{Rr + K_0^2}{K_0^2+R^2}\right] \Rightarrow$

$a = \frac{50}{73}\frac{F}{M}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, $F_A = \frac{50}{73}F\left(\frac{r}{R} + \frac{23}{50}\right)$

(B)

$\tau_C = (r+R)F = I_C\alpha = MK_C^2 \frac{a}{R}$

con $K_C^2 = K_0^2 + R^2$ (Steiner)

risolvendo per l'accelerazione

$\Rightarrow a = \frac{F}{M}\frac{R(R+r)}{K_0^2+R^2}$

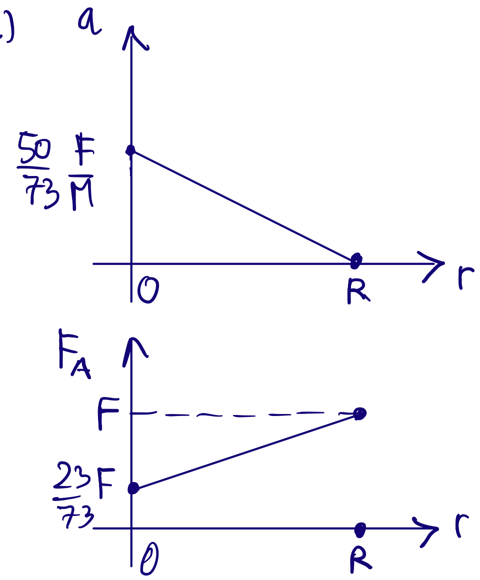
e $Ma = F + F_A \Rightarrow$

$F_A = Ma - F =$

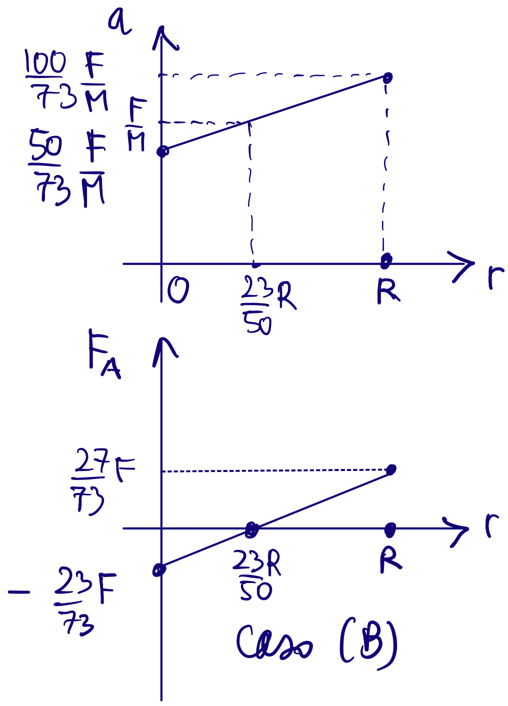
$= F\left[\frac{Rr - K_0^2}{K_0^2+R^2}\right] \Rightarrow$

$a = \frac{50}{73}\frac{F}{M}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$, $F_A = \frac{50}{73}F\left(\frac{r}{R} - \frac{23}{50}\right)$

(c)



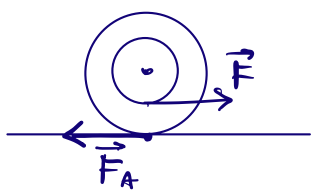
caso (A)

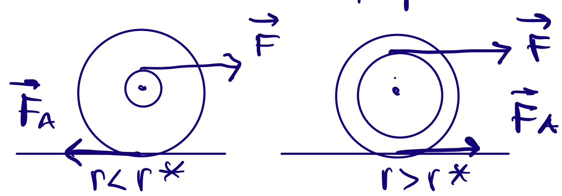


Caso (B)

(d) quando $r = r^* = \frac{23}{50}R = \frac{K_0^2}{R}$ nel caso (B) risulta $F_A = 0$ e dunque $a = F/M$ (c'è puro rotolamento senza necessità / presenza di attrito nel punto C).

Quindi la forza di attrito nei due casi è rivolta come raffigurato:





(e) Utilizzando le relazioni sopra determinate e la seconda equazione cardinale:

$$\Delta L_0 = \tau_0 \Delta t = |\vec R \times \vec F_A + \vec r \times \vec F|$$

$F_A = \frac{50}{73}F\left(\frac{r}{R} + \frac{23}{50}\right)$;

con $r = R$ è

$F_A = F \Rightarrow \tau_0 = 0$
$\Rightarrow \Delta L_0 = 0$

con $r = R/2$ è

$F_A = \frac{48}{73}F \Rightarrow \tau_0 = \frac{23}{146}RF$

$\Rightarrow \Delta L_0 = \tau_0 \Delta t = 0.25\ kg\,m^2/s$

$F_A = \frac{50}{73}F\left(\frac{r}{R} - \frac{23}{50}\right)$

con $r = R$ è

$F_A = \frac{27}{73}F \Rightarrow \tau_0 = \frac{46}{73}RF$

$\Rightarrow \Delta L_0 = \tau_0 \Delta t = 1.01\ kg\,m^2/s$

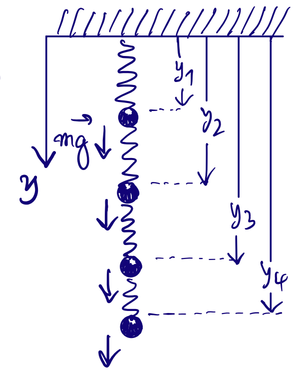
con $r = R/2$ (tenendo conto che $R/2 > r^* = \frac{23}{50}R$)

$F_A = \frac{2}{73}F \Rightarrow \tau_0 = \frac{2}{73}RF$

$\Rightarrow \Delta L_0 = \tau_0 \Delta t = 0.76\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$

2

(a) Le equazioni del moto per le 4 masse sono (in direzione y)



$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -ky_1 - k(y_1-y_2) + mg\,, \\ m\ddot{y}_2 = -k(y_2-y_1) - k(y_2-y_3) + mg\,, \\ m\ddot{y}_3 = -k(y_3-y_2) - k(y_3-y_4) + mg\,, \\ m\ddot{y}_4 = -k(y_4-y_3) + mg\,. \end{cases}$$

La condizione di equilibrio statica si ottiene imponendo che le quattro equazioni sopra scritte siano identicamente nulle.

Sommando le quattro relazioni corrispondenti si ottiene (y_k^o sono le coordinate verticali di equilibrio):

$$\begin{aligned} -ky_1^o + 4mg &= 0 &\Rightarrow\ & y_1^o = 4mg/k \\ -ky_2^o + 7mg &= 0 &\Rightarrow\ & y_2^o = 7mg/k \\ -ky_3^o + 9mg &= 0 &\Rightarrow\ & y_3^o = 9mg/k \\ -ky_4^o + 10mg &= 0 &\Rightarrow\ & y_4^o = 10mg/k\,. \end{aligned}$$

e

(b) Lasciando libera l'ultima massa in basso si ha semplicemente che essa soddisfa l'equazione di moto

$$m\ddot{y}_4 = -k(y_4 - y_3^o) + mg = -ky_4 + 10mg = -k(y_4 - y_4^o)$$

ovvero l'equazione di moto armonico semplice con pulsazione

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad e \quad \nu_4 = \frac{\omega_4}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Se la massa libera è la 1ª, 2ª o 3ª l'equazione di moto è (per la 3ª massa, per esempio)

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_3 &= -k(y_3 - y_2^o) - k(y_3 - y_4^o) + mg = \\ &= -2ky_3 + 18mg = -2k(y_3 - y_3^o) \end{aligned}$$

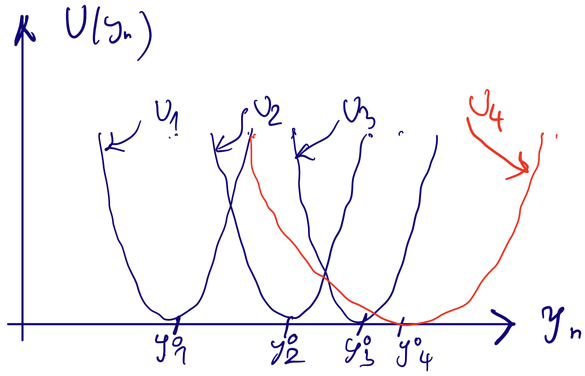
ovvero l'equazione di moto armonico semplice con pulsazione

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad e \quad \nu_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}\,.$$

(c) L'energia potenziale è nella forma standard per l'oscillatore armonico riferito alle nuove posizioni di equilibrio determinate al punto (a).

$$U_n = \frac{1}{2}k_n(y_n - y_n^o)^2\,;$$

dove $k_1 = k_2 = k_3 = 2k$ e $k_4 = k$.

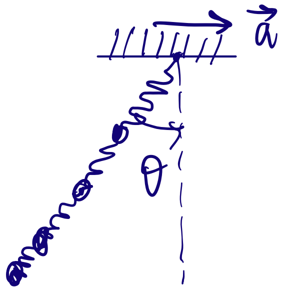


(d) Nel caso di moto rettilineo uniforme del supporto la situazione non cambia (non agiscono forze non-inerziali).

(e) Nel caso di moto orizzontale uniformemente vario l'equilibrio verticale non è modificato ma nasce, nel riferimento accelerato, la forza apparente di intensità ma e diretta contrariamente alla direzione del moto.

Quindi la catena delle molle | masse si dispone obliquamente secondo l'angolo di inclinazione dalla verticale θ tale che

$$tg\,\theta = \frac{a}{g}$$

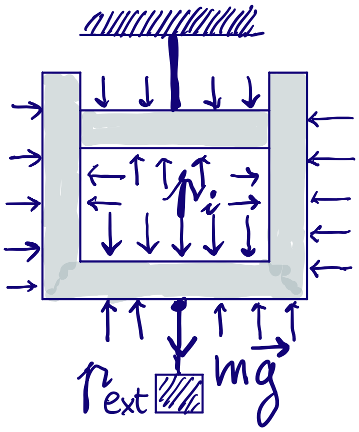


③ All'inizio il sistema è in equilibrio statico e dunque il risultante delle forze deve essere un vettore nullo.

Il tappo non può esercitare forze sul contenitore perché scorre in esso liberamente.

Quindi l'equilibrio dipende dal bilanciamento di tre forze:

- il peso della massa collegata al contenitore;
- la forza di pressione dovuta all'aria esterna;
- la forza di pressione esercitata dal gas.



Nella direzione verticale (positiva verso l'alto) è

(a) $$p_{ext} S - p_i S - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = p_{ext} - mg/S$$

Numericamente $$p_i = 1.06\ \text{bar} - \frac{4\ \text{kg} \times 9.8\ \text{m/s}^2}{60 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} = 1.06 \times 10^5\ \text{Pa} - 6.5 \times 10^3\ \text{Pa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_i = 0.99\ \text{bar}$$

$$\Rightarrow \quad T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{p_i}{nR} \cdot h_i S = \frac{9.95 \times 10^4\ \text{Pa} \times 1.5\ \text{m} \times 60 \times 10^{-4}\ \text{m}^2}{0.38\ \text{mol} \times 8.31\ \text{J}/\text{mol}\cdot\text{K}} = 283.5\ \text{K}$$

(b) La trasformazione è quasi statica durante l'assorbimento del calore Q e dunque non si allontana mai dall'equilibrio iniziale delle forze: la pressione quindi rimane costante e il processo è isobaro.

(c) Per una trasformazione isobara

$$Q = n c_p \Delta T = 0.38\ \text{mol} \times \frac{7}{2} \times 8.31\ \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times 45\ \text{K} = 497.4\ \text{J} = 118.9\ \text{cal}$$

(d) Nel caso di immissione quasi-statica di calore la trasformazione è reversibile, per cui

$$\Delta S_{univ} = 0$$

con $\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{risc}$ e $\Delta S_{gas} = n c_p \ln\left(\frac{T_i + \Delta T}{T_i}\right) = n c_p \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_i}\right)$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{risc} = -\Delta S_{gas} = -n c_p \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_i}\right) = -1.63\ \text{J/K}$$

(e) il processo ora è irreversibile perché è non quasi-statico quindi, essendo il contenitore isolato termicamente, si tratta di una trasformazione adiabatica irreversibile.

Gli stati iniziale e finale sono ancora di equilibrio (quando vengono raggiunti) e sono tali che

$$p_i = p_{ext} - \frac{mg}{S} \quad ; \quad p_f = p_{ext} - \frac{Mg}{S}$$

numericamente $\quad p_f = 1.06 \text{ bar} - \dfrac{12 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{60\times10^{-4} \text{ m}^2} = 0.86 \text{ bar}$.

(f) Il lavoro fatto dal gas è, per azione/reazione, eguale e contrario a quello fatto dall'ambiente. Quest'ultimo è ottenuto a partire dalla

$$W_{amb} = F_{ext}\,\Delta h = (Mg - p_{ext} S)\,\Delta h$$

dove $M = m + \Delta m = 4 \text{ kg} + 8 \text{ kg} = 12 \text{ kg}$.

Il lavoro fatto dal gas è $W_{gas} = -W_{amb}$ e, per il primo principio,

$$\Delta U = Q_{gas} - W_{gas} = W_{amb} = n c_v (T_f - T_i)$$

Quindi $\quad (Mg - p_{ext} S)\cdot \Delta h = n c_v (T_f - T_i)$

dove $\quad \Delta h = \dfrac{\Delta V}{S} = \dfrac{nR}{S}\left(\dfrac{T_f}{p_f} - \dfrac{T_i}{p_i}\right)$.

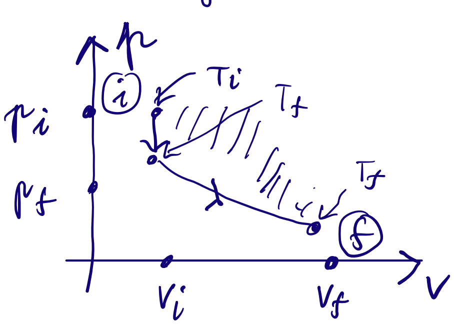
Sviluppando l'eguaglianza si ottiene l'incognita cercata:

$$T_f = \frac{1}{\gamma} T_i \left[1 + (\gamma - 1) \frac{p_{ext} S - Mg}{p_{ext} S - mg} \right] \quad , \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 7/5$$

numericamente $\quad T_f = \dfrac{283.5\text{K}}{7/5} \left[1 + \dfrac{2}{5} \dfrac{1.06\times10^5 \text{ Pa} \times 60\times10^{-4} \text{ m}^2 - 12 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{1.06\times10^5 \text{ Pa} \times 60\times10^{-4} \text{ m}^2 - 4 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2} \right]$

$$\Rightarrow \quad T_f = 0.96\, T_i = 272.9 \text{ K}$$

(g) Nel caso irreversibile solo il gas cambia l'entropia dell'universo. Si può utilizzare una qualunque trasformazione reversibile che connetta gli stessi stati iniziale e finale:



$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas,if} =$$
$$= \Delta S_{isoc} + \Delta S_{isoT} =$$
$$= n c_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = n c_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{T_f p_i}{T_i p_f} =$$
$$= n c_p \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{p_i}{p_f} = 0.025 \text{ J/K}$$