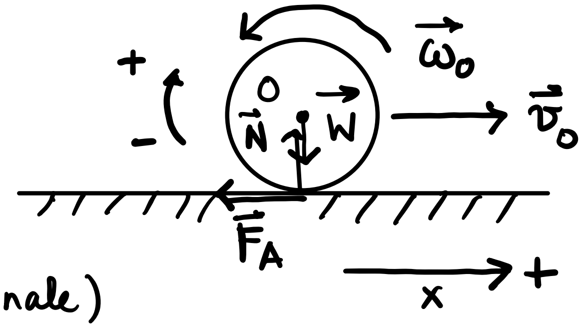
①

(a) Diagramma delle forze



Equazione del moto (I cardinale)

$$\vec{F}_A + \vec{W} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Proiezione lungo x : $\quad -F_A = -\mu N = -\mu m g = m a$

$$\Rightarrow a = -\mu g$$

Moto uniformemente vario $(a = \text{costante}) \Rightarrow v = v_0 + at = v_0 - \mu g t$

II Equazione cardinale del moto $\quad \vec{\tau}_0^{(ext)} = I_0 \vec{\alpha} \Rightarrow$

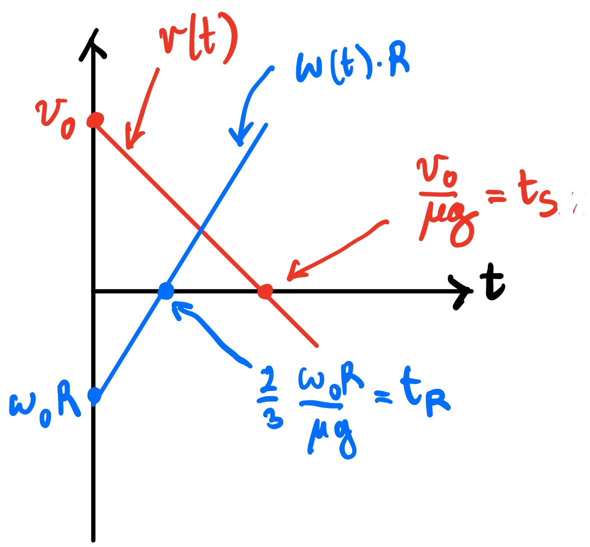
$$\Rightarrow \quad I_0 \alpha = F_A R \quad , \quad I_0 = m K_0^2 \quad , \quad K_0^2 = 2R^2/3 \ (\text{guscio sferico})$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{F_A R}{m K_0^2} = \frac{\mu g R}{K_0^2} = \frac{3\mu g}{2R}$$

moto rotazionale uniformemente vario $(\alpha = \text{costante}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = -\omega_0 + \alpha t = -\omega_0 + \frac{3\mu g}{2R} t \ .$$

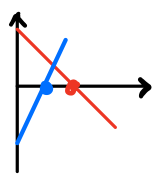
Leggi orarie di $v(t)$ e $\omega(t)$ (conviene graficare ωR):



Si osservano i tre casi possibili

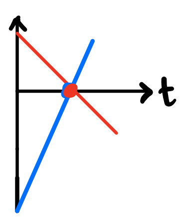
$t_R < t_S \Rightarrow$

$\frac{\omega_0 R}{v_0} < 3/2$



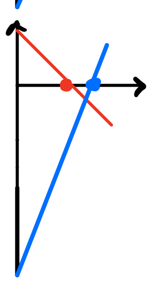
$t_R = t_S \Rightarrow$

$\frac{\omega_0 R}{v_0} = 3/2$



$t_R > t_S \Rightarrow$

$\frac{\omega_0 R}{v_0} > 3/2$

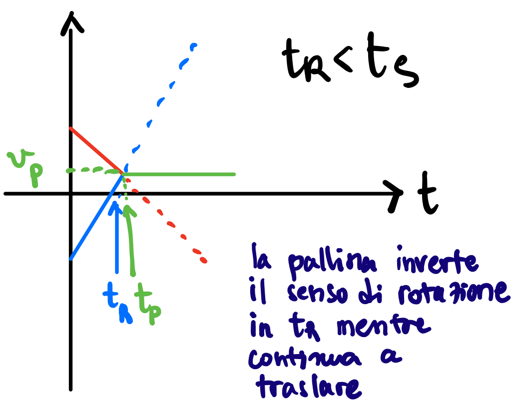


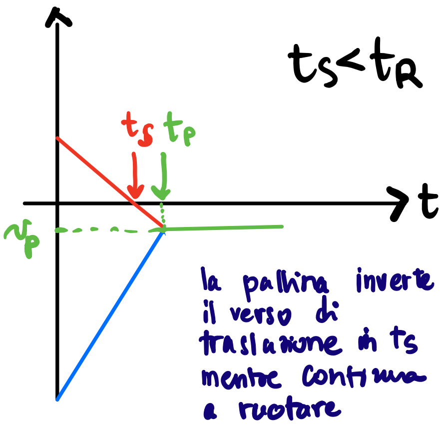
(b) La divisione tra i due casi si ha proprio quando i due istanti di tempo nei quali si annullano le velocità v e ω sono gli stessi, per cui la relazione richiesta è

$$\frac{\omega_0 R}{v_0} = 3/2$$

e, in corrispondenza, la pallina si ferma del tutto.

(c) Conviene ridisegnare le leggi orarie nei due casi $\frac{\omega_0 R}{v_0} \gtrless 3/2$ ovvero $t_R \gtrless t_S$:





v_p è la velocità di puro rotolamento.

t_p indica il tempo di puro rotolamento, ovvero quando

$$\omega(t_p) \cdot R = v(t_p) \Rightarrow -\omega_0 R + \frac{3}{2}\mu g t_p = v_0 - \mu g t_p$$

$$\Rightarrow t_p = \frac{2}{5}\,\frac{v_0 + \omega_0 R}{\mu g}$$ e, in corrispondenza, la velocità di puro rotolamento è $v(t_p) = v_p = \frac{3v_0 - 2\omega_0 R}{5}$

(d) $v_0 = 0.6\,m/s > \frac{2}{3}\omega_0 R = 0.25\,m/s \Rightarrow t_R < t_S$

e $t_p = 0.1\,s$, $v_p = 0.21\,m/s$

(e) Si usa il teorema lavoro energia, $W_{ATTR} = \Delta E_K = E_{Kf} - E_{Ki}$

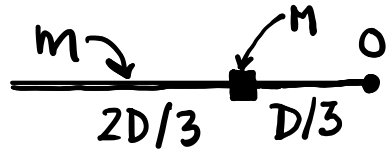
$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2, \quad E_{Ki} = \frac{1}{2}m\left[v_0^2 + \frac{2}{3}\omega_0^2 R^2\right] \simeq 6.1\times10^{-4}\,J$$

$$E_{Kf} = \frac{1}{2}m\left[v_p^2 + \frac{2}{3}v_p^2\right] = \frac{5}{6}mv_p^2 \simeq 10^{-4}\,J$$

$$\Rightarrow W_{ATTR} \simeq -5.1\times10^{-4}\,J$$

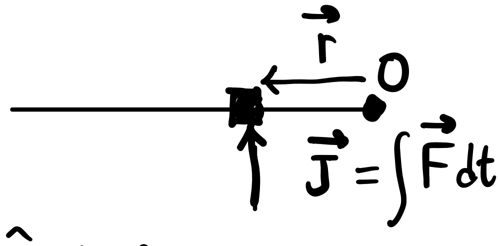
②

(a) Calcolo del momento di inerzia



$$I_0 = I_M + I_m = M\left(\frac{D}{3}\right)^2 + m\frac{D}{3}^2 = \left(\frac{M}{3}+m\right)\frac{D^2}{3} = 3\ \text{kg}\,\text{m}^2$$

(b) Seconda equazione cardinale



$$\frac{d\vec L_0}{dt} = \vec \tau_0 = \vec r \times \vec F = \frac{D}{3} F \hat k$$

$\hat k$ è il versore entrante nel foglio (asse "z")

$$\Rightarrow \quad \Delta \vec L_0 = \frac{D}{3}\hat k \int F\,dt = \frac{D}{3} J \hat k = \vec L_f$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \vec L_0 = \vec L_f = 1\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\ \hat k .$$

$\vec L_f$ è il momento angolare che ha la porta subito dopo l'impulso

(c) L'effetto di $\vec J$ è quello di fissare le condizioni iniziali del moto della porta ovvero la sua velocità angolare iniziale attorno all'asse z passante per O:

dalla $\vec L_0 = I_0 \vec \omega$, con $\vec L_0 = \vec L_f$ $\Rightarrow$ $\omega(t=0) = \frac{L_f}{I_0} = \frac{DJ}{\left(\frac{M}{3}+m\right)D^2}$

$$\Rightarrow \quad \omega(t=0) = \frac{1}{3}\ \text{rad}/\text{s} .$$

L'equazione di moto è fissata dalla seconda equazione cardinale che include l'azione del momento frenante $\vec \tau$:

$$\tau = -C\phi = \frac{dL_0}{dt} = I_0\frac{d\omega}{dt} = I_0\frac{d^2\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{C}{I_0}\phi ,$$

ossia l'equazione di un oscillatore armonico semplice con pulsazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{C}{I_0}} = \frac{3}{D}\sqrt{\frac{C}{(M+3m)}} \simeq 1.15\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(d) La legge oraria si determina dalla soluzione generale

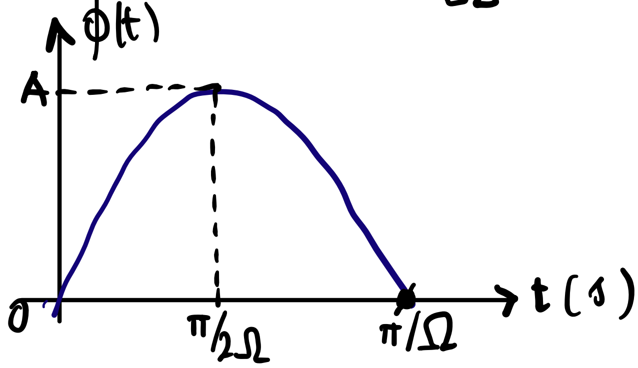
$$\phi(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t + \beta)$$

con condizioni iniziali $\phi(0) = 0$ e $\dot{\phi}(0) = \omega(t=0)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \phi(0) = A \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \beta = 0$$

$$\omega(t=0) = \Omega A \Rightarrow A = \frac{\omega(t=0)}{\Omega} = \frac{1/3 \text{ rad/s}}{1.15 \text{ rad/s}} = 0.29 \text{ (rad)}$$

$\phi(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t)$



(e) Proprio dal grafico si osserva che l'angolo massimo coincide con l'ampiezza A,

$$\phi_{max} = A = 0.29 \text{ (rad)}$$

e la porta si richiude quando $t_R = \pi/\Omega \cong 2.73$ s

(f) L'energia è espressa come somma di quella cinetica e quella potenziale elastica della molla di richiamo,

$$E_K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2, \quad E_p = \frac{1}{2} C \phi^2$$

per cui le grandezze si eguagliano nel tempo t_E tale che

$$\frac{1}{2} I_0 \Omega^2 A^2 \cos^2(\Omega t_E) = \frac{1}{2} C A^2 \operatorname{sen}^2(\Omega t_E);$$

essendo $\frac{I_0 \Omega^2}{C} = 1 \Rightarrow \cos(\Omega t_E) = \operatorname{sen}(\Omega t_E)$

$$\Rightarrow \Omega t_E = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \phi_E = \phi(t_E) = \frac{A}{\sqrt{2}} \cong 0.21 \text{ rad.}$$

3

(a) Dall'equazione di stato dei gas ideali:

$$V_1 = nRT_1/p_1 \quad \text{con} \quad p_1 = 1.5\ \text{atm} = 1.52\times10^5\ \text{Pa}$$
$$T_1 = (7+273)\ \text{K} = 280\ \text{K}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \frac{3\ \text{mol}\times 8.3\ \text{J/mol·K}\times 280\ \text{K}}{1.52\times10^5\ \text{Pa}} = 4.6\times10^{-2}\ \text{m}^3 \quad (45.9\ \ell)$$

La prima trasformazione è isoterma, per cui

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_1}{3} = 0.5\ \text{atm} = 5.1\times10^4\ \text{Pa}$$

La seconda trasformazione è isocora, per cui

$$T_3 = T_2\frac{p_3}{p_2} = \frac{T_2}{5} = \frac{T_1}{5} = 56\ \text{K} = -217\ °\text{C}$$

(b) Nella trasformazione politropica è $PV^K = \text{costante}$

$$\Rightarrow \quad p_3V_3^K = p_1V_1^K \Rightarrow \frac{p_3}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{\lg(p_3/p_1)}{\lg(V_1/V_3)} = \frac{\lg(15)}{\lg(3)} = 2.46$$

(c) Differenziando la $PV^K = \text{costante}$ $\quad PdV = -\frac{1}{K}VdP$;

dall'equazione di stato $PV = nRT \Rightarrow PdV + VdP = nRdT$;

sostituendo : $PdV = nRdT/(1-K)$.

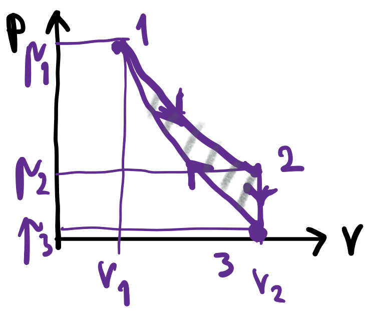
Calcolo del calore scambiato sulla politropica

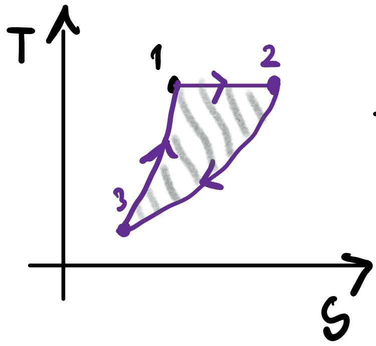
$$\delta Q = dU + \delta W = nc_v dT + PdV = ndT\left(c_v + \frac{R}{1-K}\right) =$$
$$= nRdT\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1-K}\right) = nc\,dT$$

$$\Rightarrow \quad dS = \frac{\delta Q}{T} = nc\frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{31}^{gas} = nc\ln\frac{T_3}{T_1} = 72.9\ \text{J/K}$$

$$\Delta S_{31}^{univ} = 0\ \text{J/K}, \quad \Delta S_{31}^{amb} = -\Delta S_{31}^{gas} = -72.9\ \text{J/K}$$

(d)





NB: lungo l'isotropica (31) è $dS = nc\,dT/T \Rightarrow$
$T = T_i\, e^{\Delta S/nc}$

(e) il calore specifico è tale che $\delta Q = nc\,dT$

per cui $c = R\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{1-k}\right) = 15.1\ J/_{mol\,K}$

(f) Calcolo del lavoro nel ciclo : $W = W_{12} + W_{31}$;

$$W_{12} = nRT_1 \ln(V_2/V_1) = 7.7\ kJ$$

$$W_{31} = \int_3^1 p\,dV = \text{costante} \int_{V_3}^{V_1} V^{-k}\,dV = \frac{1}{1-k}\left[p_1V_1 - p_3V_3\right] =$$

$$= \frac{1}{1-k}\left[p_1V_1 - \frac{p_1}{15}\cdot 3V_1\right] = \frac{p_1V_1}{1-k}\cdot\frac{4}{5} = \frac{nRT_1}{1-k}\,\frac{4}{5} = -3.8\ kJ$$

$\Rightarrow$ $W = 3.9\ kJ$

(g) In un ciclo $Q = W = 3.9\ kJ$

(h) Calori scambiati

$$Q_{12} = W_{12} = 7.7\ kJ > 0$$
$$Q_{23} = n c_v (T_3 - T_2) = -13.9\ kJ < 0$$
$$Q_{31} = nc\,(T_1 - T_3) = +10.1\ kJ > 0$$

$\Rightarrow$ $Q_{IN} = Q_{12} + Q_{31} = 17.8\ kJ \Rightarrow \eta = \frac{W}{Q_{IN}} = 0.22$

Efficienza di Carnot: $\eta_c = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 0.80 > \eta$