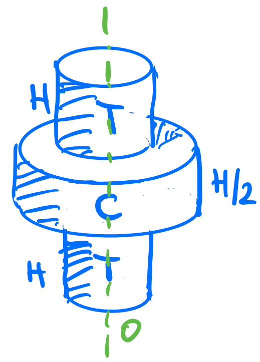
1

a) Calcolo del momento di inerzia:



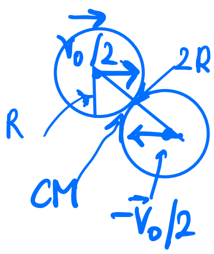
Volumi: $V_C = \pi R^2 \frac{H}{2}$; $V_T = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 H = \frac{V_C}{2}$;

$\Rightarrow V_{TOT} = 2V_T + V_C = 2V_C \Rightarrow M_C = M/2,\ M_T = M/4$;

$$I_0 = I_C + 2I_T = \frac{1}{2} M_C R^2 + 2\times\frac{1}{2} M_T \left(\frac{R}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{M}{2} R^2 + 2\times\frac{1}{2}\frac{M}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5}{16} MR^2$$

b) Nell'urto si conservano la quantità di moto del sistema e il suo momento angolare rispetto un qualunque polo fisso.

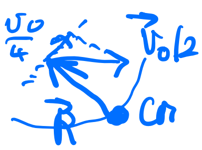


Momento angolare riferito al CM:

versore uscente dal foglio

$$\vec L_{CM} = 2MR\frac{v_0}{2}\cdot\frac{1}{2}\hat k = MR\frac{v_0}{2}\hat k = I_{CM}\vec\omega_{CM}$$

perché il momento angolare del disco rispetto al CM è ottenuto dal prodotto esterno:



Poi $I_{CM} = 2(I_0 + MR^2) = \frac{21}{8}MR^2$

$$\Rightarrow \vec\omega_{CM} = \vec L_{CM}/I_{CM} = \frac{MRv_0/2}{21MR^2/8}\hat k = \frac{4}{21}\frac{v_0}{R}\hat k$$

Il moto del CM è rettilineo uniforme con velocità $\vec v_0/2$. I due dischi ruotano attorno al CM con velocità angolare $\vec\omega_{CM}$.

c) $\Delta E_K = \frac{1}{2}(2M)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = -\frac{17}{84}Mv_0^2$

numericamente: $\Delta E_K = -4.4\times10^5$ J

d) Si ripete il caso (b) aggiungendo al momento angolare "orbitale" relativo al CM anche quello "di spin":

$$\vec L_{CM} = \frac{MRv_0}{2}\hat k - I_0\omega_0\hat k \quad \text{con } \omega_0 = \frac{8}{5}\frac{v_0}{R} \Rightarrow \vec L_{CM} = \vec 0,$$

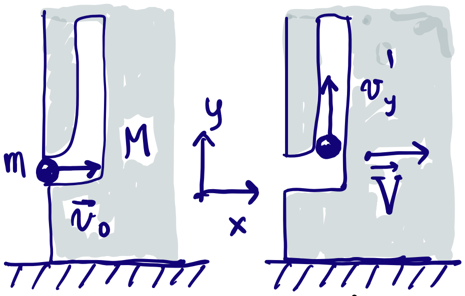
cioè dopo l'urto il sistema non ruota attorno al CM ma trasla e basta.

e) Come nel caso (c), $\Delta E_K = \frac{1}{2}(2M)v_{CM}^2 - \left(\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2\right) = -\frac{13}{20}Mv_0^2$

numericamente: $\Delta E_K = -1.4\times10^6$ J

2

(a) Si applica la conservazione dell'energia meccanica, distinguendo le fasi di urto, quella di salita della massa e di compressione della molla.



(prima) (dopo)

Conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

Conservazione della quantità di moto nella direzione x solamente (nella direzione y c'è il vincolo verticale)

$$m v_0 = (m+M) V.$$

Dopo l'uscita dal tratto curvo m ha velocità $\vec v' = v'_y \hat{j} + V \hat{i}$ perché m continua a muoversi lungo x solidalmente con il blocco M.

$$\Rightarrow V = \frac{m}{m+M} v_0 \quad e \quad v'^2 = v'^2_y + V^2 = v_0^2 - \frac{M}{m} V^2 \Rightarrow v'^2_y = v_0^2 - \left(\frac{m+M}{m}\right) V^2 = v_0 \sqrt{\frac{M}{m+M}}.$$

(b) Rispetto al CM del sistema si utilizza la trasformazione $\vec v^{(CM)} = \vec v - \vec v_{CM}$ dove

$$\vec v_{CM} = \frac{m \vec v_0}{m+M} \ (\text{prima}) \quad e \quad \vec v'_{CM} = \frac{m \vec v' + M \vec V}{m+M} \ (\text{dopo})$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} v_x^{(CM)} &= \frac{M}{m+M} v_0 \quad (\text{per } m) \\ V_x^{(CM)} &= -\frac{m v_0}{m+M} \quad (\text{per } M) \end{aligned}\right\} (\text{prima})$$

solo lungo x (il moto è orizzontale)

$$\left.\begin{aligned} v'^{(CM)}_x &= V'^{(CM)}_x = 0 \\ v'^{(CM)}_y &= \frac{M}{m+M} v'_y, \quad V'^{(CM)}_y = -\frac{m}{m+M} v'_y \end{aligned}\right\} (\text{dopo})$$

(lungo x il CM e le due masse sono solidali).

Dalla $v'_y = v_0 \sqrt{\frac{M}{m+M}}$ si può anche scrivere $v'^{(CM)}_y = \left(\frac{M}{m+M}\right)^{3/2} v_0$, $V'^{(CM)}_y = -\sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}}\, v_0$.

Calcolo dell'energia cinetica rispetto al CM:

(c) prima: $E_K^{(CM)} = \frac{1}{2} m v^{(CM)2} + \frac{1}{2} M V^{(CM)2} = \frac{1}{2} \frac{m M}{m+M} v_0^2$ [come previsto anche dalla scomposizione di Koenig]

dopo: $$E'^{(CM)}_K = \underbrace{0}_{\text{contributo orizzontale}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \left[v_y^{(CM)\prime}\right]^2 + \frac{1}{2} M \left[V_y^{(CM)\prime}\right]^2}_{\text{contributo verticale}} = \frac{1}{2} \frac{m M^2}{(m+M)^2} v_0^2$$

Questa energia varia col tempo in funzione della quota raggiunta da m lungo la guida verticale ($y = v'_y t - \frac{1}{2} g t^2$) e $E_p = mgy$.

(d) Moto dopo l'urto: oscillatore armonico in direzione x con massa $m+M$ quando m è ancora in M.

L'equazione del moto è $(m+M)\ddot{x} = -kx$ con soluzione generale

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \quad e$$

condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V = \frac{m}{m+M} v_0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ A = \frac{m v_0}{\sqrt{k(m+M)}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{m v_0}{\sqrt{k(m+M)}} \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m+M}}\, t\right]$$

con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$.

(e) Il tempo che m impiega a tornare al punto di rigresso della guida è

$$t_s = \frac{2v_y'}{g} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}};$$

(f) Perché quando m esce M sia ferma, essa deve trovarsi per $t = t_s$ in un punto di inversione dell'oscillazione, cioè

$$t_s = T/2 \quad \text{ovvero} \quad \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}} = \pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \frac{\pi g}{2}\,\frac{m+M}{\sqrt{Mk}}$$

③ Il gas è ideale biatomico, $c_p = \frac{7}{2}R$, $c_v = \frac{5}{2}R$, $\gamma = 7/5$.

Trasformazioni : (12) adiabatica irreversibile;
(23) isocora reversibile;
(34) isobara reversibile;
(41) adiabatica reversibile.

ⓐ $P_1V_1 = nRT_1$, $T_1 = \frac{P_1V_1}{nR} = \frac{2.76 \text{ atm} \times 1\,\ell}{0.08 \text{ mol } 0.082\ \ell\cdot\text{atm/mol K}} = 421$ K

$T_2 = T_1$, $W_{12} = Q_{12} = 0$, $P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = 0.86$ atm ;

$V_2 = V_3$, $P_3 = \frac{T_3}{T_2}P_2 = 0,57$ atm $= P_4$;

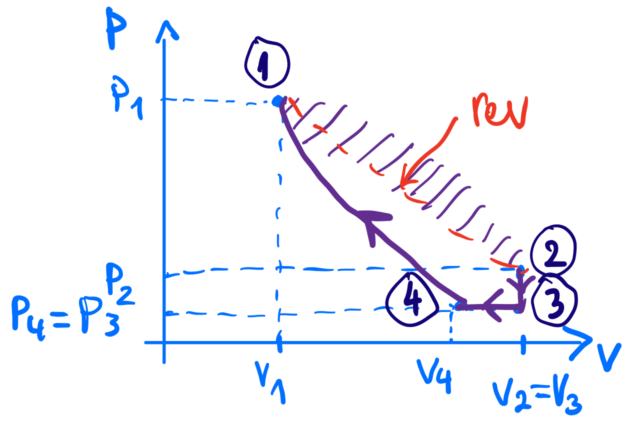
$W_{23} = 0$; $Q_{23} = \Delta U_{23} = nc_v(T_3 - T_2) = -234.8$ J ;

$P_4V_4^{\gamma} = P_1V_1^{\gamma} \Rightarrow V_4 = V_1\left(\frac{P_1}{P_4}\right)^{1/\gamma} = 3.07\,\ell$; $T_4 = \frac{P_4V_4}{nR} = 269$ K

$Q_{34} = nc_p(T_4 - T_3) = -26$ J ; $W_{34} = P_3(V_4 - V_3) = -7$ J; $\Delta U_{34} = -19$ J

$Q_{41} = 0$; $W_{41} = -\Delta U_{41} = -nc_v(T_1 - T_4) = -253$ J

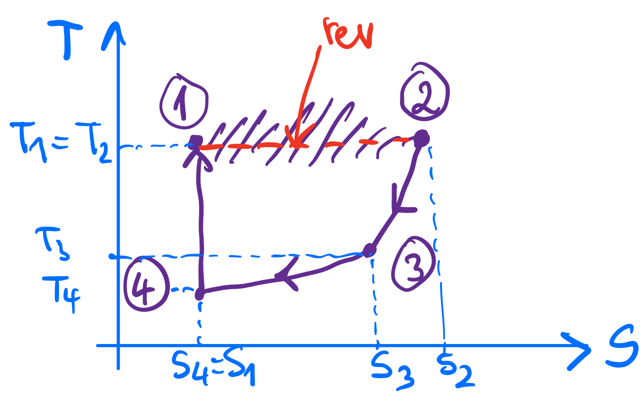
ⓑ



ⓒ $\Delta S_{univ} = \Delta S_{12} = nR \ln V_2/V_1 = nR \ln 3.2 = 0.77$ J/K ;

$\Delta S_{gas} = 0$ sul ciclo.

ⓓ



(e) Il lavoro totale compiuto dal gas è negativo a causa della espansione libera. Quindi si è «sprecato» il lavoro

$$W_{12}^{(rev)} = T_1 \Delta S_{12} = 324\ J = Q_{12}^{(rev)} = nRT_1 \log(V_2/V_1)$$

(f)

$$W_{TOT}^{(rev)} = W_{12}^{(rev)} + W_{34} + W_{41} = 64\ J$$

$$Q_{IN}^{(rev)} = Q_{12}^{(rev)} \qquad \Rightarrow \qquad \eta = \frac{W_{TOT}^{(rev)}}{Q_{IN}^{(rev)}} = 0.20$$

e $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_4}{T_1} = 0.36 > \eta$ (per il teorema di Carnot)