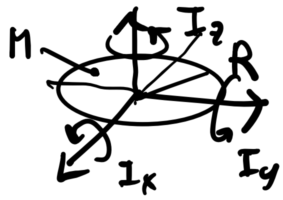
1

(a) Momento di inerzia di un disco sottile attorno a un asse diametrale, come si ottiene applicando il teorema delle lamine sottili a simmetria centrale e circolari:



$$I_z = MR^2/2, \quad I_x + I_y = I_z, \quad I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{MR^2}{4}.$$

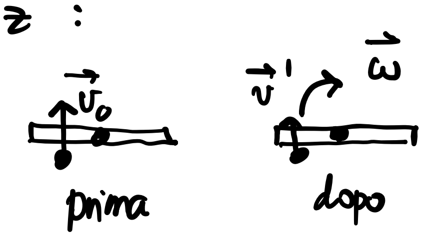
Quindi, includendo i due assi di supporto,

$$I_z = \frac{MR^2}{4} + 2 \times \frac{1}{2}(16M)\left(\frac{R}{8}\right)^2 = \frac{MR^2}{2}$$

(b) Si conserva il momento angolare totale del sistema (disco, supporti e proiettile) riferito a un polo fisso, per esempio il centro del disco, e limitatamente alla approssimazion d'urto (la molla non scambia momento angolare apprezzabilmente nel breve intervallo di tempo).
Se l'urto è elastico, per definizione si conserva anche l'energia cinetica del sistema.

(c) Conservazione di $\vec{L}_O$ riferito al centro O del disco e proiettato lungo l'asse di rotazione z:

$$m v_0 d = m v' d + I_z \omega$$



(i) Urto anelastico perfetto: m si unisce al disco per cui

$$m v_0 d = (I_z + m d^2)\,\omega_{AN}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{AN} = \frac{m v_0 d}{I_z + m d^2} = \frac{2 m v_0 d}{MR^2 + 2md^2}}.$$

(ii) Urto elastico perfetto: si conserva anche E_K.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_{el}^2 \\ mv_0 d = mv'd + I_z\omega_{el} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0^2 - v'^2 = \frac{MR^2}{2m}\omega_{el}^2 \\ v_0 - v' = \frac{MR^2}{2md}\omega_{el} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_0 + v' = \omega_{el} d \\ v_0 - v' = \frac{MR^2}{2md}\omega_{el} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega_{el} = \frac{4mv_0 d}{2md^2 + MR^2}}$$

(d) Dalle stesse espressioni sopra si ottiene

$$\boxed{v' = \frac{2md^2 - MR^2}{2md^2 + MR^2} v_0}$$

che vale solo per il caso elastico [in quello anelastico $v' = \omega_0 d$].

(e) Dopo l'urto c'è solo l'effetto torcente elastico dovuto alla molla:

$$\dot{\vec{L}}_0 = \vec{\tau} \Rightarrow I_z\ddot{\theta} = -k\theta$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{I_z}}, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{K}}$$

(i) Caso elastico, $I_z^{el} = MR^2/2$ e $\boxed{T^{el} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{2K}}}$

(ii) Caso anelastico, $I_z^{AN} = \frac{MR^2}{2} + md^2$ e $\boxed{T^{AN} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2/2 + md^2}{K}}}$

(f) La legge oraria per questo moto è

$$\theta(t) = A \operatorname{sen} \Omega^{AN} t \quad \text{con} \quad \dot{\theta}(0) = \omega^{AN} \Rightarrow A = \omega^{AN}/\Omega^{AN} =$$

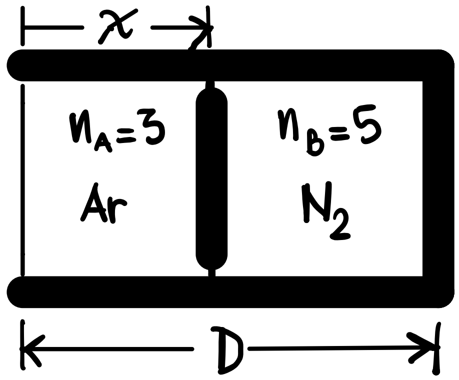
$$= \frac{2mv_0 d}{MR^2 + 2md^2} \cdot \sqrt{\frac{MR^2 + 2md^2}{2K}} = \boxed{\frac{2mv_0 d}{\sqrt{2K(MR^2 + 2md^2)}} = \theta_{MAX}}$$

Numericamente: $\boxed{\theta_{max} = 0.31 \text{ rad} \simeq 17.6°}$

(g) $E_{K_i} = \frac{1}{2}mv_0^2$; $E_{K_f} = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + md^2\right)\omega_{AN}^2$; $\Delta E_K = E_{K_f} - E_{K_i} =$

$$= \frac{1}{4}\left(MR^2 + 2md^2\right)\frac{4m^2v_0^2d^2}{(MR^2 + 2md^2)^2} - \frac{1}{2}mv_0^2 = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{mMR^2}{MR^2 + 2md^2}v_0^2 = -0{,}59 \text{ J}}$$

2



$T_{Ai} = 350\,K, \quad T_{Bi} = 250\,K$

(a) All'equilibrio iniziale

$$p_{Ai} = p_{Bi}$$

$$\Rightarrow \frac{n_A R T_{Ai}}{V_{Ai}} = \frac{n_B R T_{Bi}}{V_{Bi}}$$

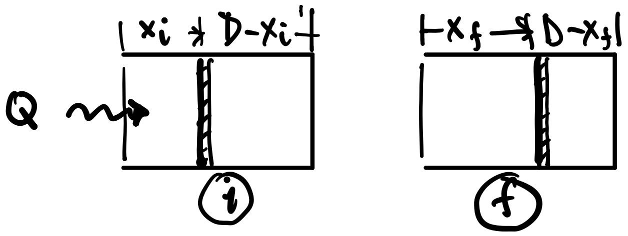
$V_{Ai} = A x_i, \quad V_{Bi} = A(D-x_i)$ [A è la sezione del contenitore]

$$\Rightarrow \frac{n_A T_{Ai}}{x_i} = \frac{n_B T_{Bi}}{(D-x_i)} \Rightarrow \boxed{x_i = \frac{n_A T_{Ai}}{n_A T_{Ai} + n_B T_{Bi}} D = 22.8\text{ cm}}$$

(b) La trasformazione dell'azoto (B) è adiabatica reversibile:

$$T_{Bi} V_{Bi}^{\gamma_B - 1} = T_{Bf} V_{Bf}^{\gamma_B - 1} = T_{Bf} \left(V_{Bi}/3\right)^{\gamma_B - 1}$$

$$\Rightarrow T_{Bf} = T_{Bi}\, 3^{\gamma_B - 1} = \boxed{T_{Bi}\, 3^{2/5} = 388\,K}$$



$p_{Af} = p_{Bf}, \quad V_{Bf} = \frac{1}{3} V_{Bi}$

$A(D-x_f) = \frac{1}{3} A(D-x_i)$

$$\Rightarrow x_f = (2D+x_i)/3 \; ; \quad \frac{n_A R T_{Af}}{S x_f} = \frac{n_B R T_{Bf}}{S(D-x_f)}$$

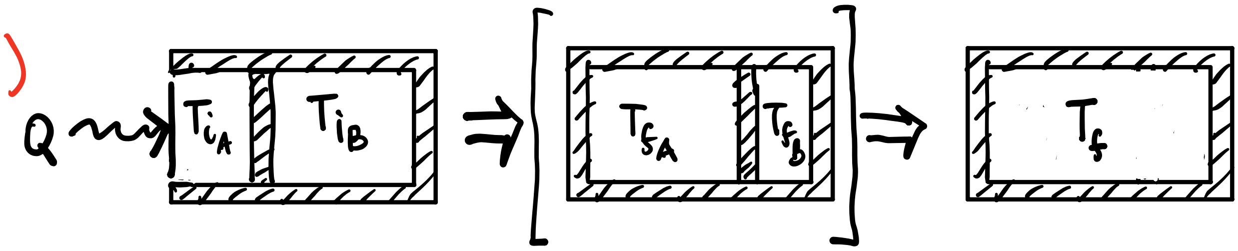
$$\frac{3 n_A T_{Af}}{2D+x_i} = \frac{3 n_B T_{Bf}}{D-x_i} \Rightarrow \boxed{T_{Af} = T_{Bf} \cdot \frac{2D+x_i}{D-x_i} \frac{n_B}{n_A} = 2920\,K}$$

(c) Conservazione dell'energia (I principio):

$$Q = \Delta U = n_A c_{V_A} \Delta T_A + n_B c_{V_B} \Delta T_B =$$

$$= \frac{3}{2} n_A R (T_{fA} - T_{iA}) + \frac{5}{2} n_B R (T_{fB} - T_{iB}) = 110\text{ kJ}$$

(d)



Tutto va come se Q dovesse essere assorbito dal sistema complessivo:

$$Q = n_A c_{VA}\left(T_f - T_{iA}\right) + n_B c_{VB}\left(T_f - T_{iB}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \frac{Q + n_A c_{VA} T_{iA} + n_B c_{VB} T_{iB}}{n_A c_{VA} + n_B c_{VB}} = 1055\ \mathrm{K}$$

(e) Si utilizzano processi reversibili che connettono lo stato iniziale e quello finale.

Si considerano

isoterme $\begin{cases} V_{iA} \rightarrow V_f = A \cdot D \\ V_{iB} \rightarrow V_f = A \cdot D \end{cases}$; isocore $\begin{cases} T_{iA} \rightarrow T_f \\ T_{iB} \rightarrow T_f \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{isot} = n_A R \ln \frac{V_f}{V_{iA}} + n_B R \ln \frac{V_f}{V_{iB}} = n_A R \ln \frac{D}{x_i} + n_B R \ln \frac{D}{D - x_i}$$

$$\Delta S_{isoc} = n_A c_{VA} \ln \frac{T_f}{T_{iA}} + n_B c_{VB} \ln \frac{T_f}{T_{iB}} ,$$

$$\boxed{\Delta S_{TOT} = \Delta S_{isot} + \Delta S_{isoc} = 44.9\ \frac{J}{K} + 190.8\ J/K = 235.7\ J/K}$$