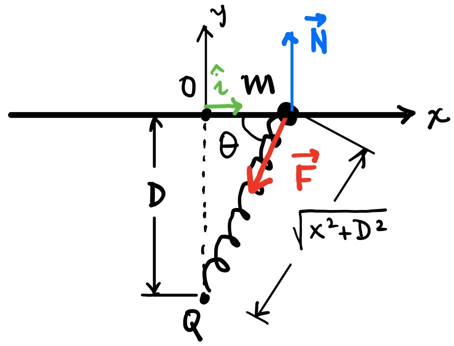
1 Siccome la guida è liscia allora la reazione vincolare $\vec{N}$ è diretta in direzione y. Rimane non bilanciata la componente x della forza elastica $\vec{F}$:



(a) $\vec{F} = -F\cos\vartheta\, \hat{\imath}$, $F = k\left(\sqrt{x^2+D^2} - l_0\right)$, $\cos\vartheta = x/\sqrt{x^2+D^2}$

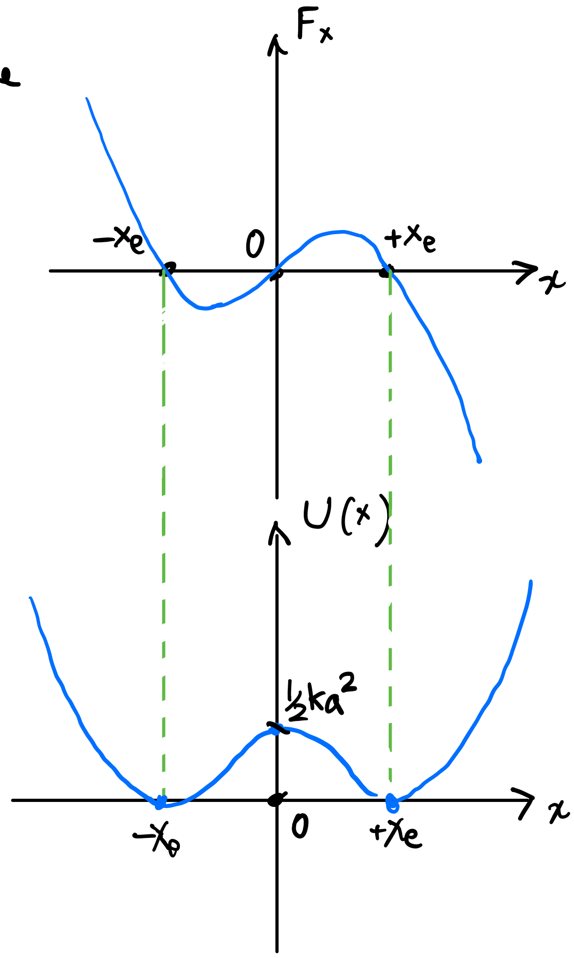
$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -kx\left[1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+D^2}}\right]\hat{\imath} = -kx\left[1 - \frac{D+a}{\sqrt{x^2+D^2}}\right]\hat{\imath} = F_x\,\hat{\imath}$$

La forza si annulla in $x=0$ e in $\pm x_e$ tale che

$$\sqrt{x_e^2+D^2} = l_0 \iff x_e = \pm\sqrt{l_0^2 - D^2} = \pm\sqrt{a(a+2D)}\,.$$

E' utile (sia per disegnare il grafico che per discutere l'ultimo punto) considerare lo sviluppo di F_x attorno a $x=0$:

$$F_x = kx\left[\frac{l_0}{D}\left(1+\frac{x^2}{D^2}\right)^{-1/2} - 1\right] \simeq \underbrace{kx\left(\frac{l_0}{D}-1\right)}_{\text{lineare}} - \underbrace{\frac{k\,l_0}{2D^3}x^3}_{\text{cubico}}$$



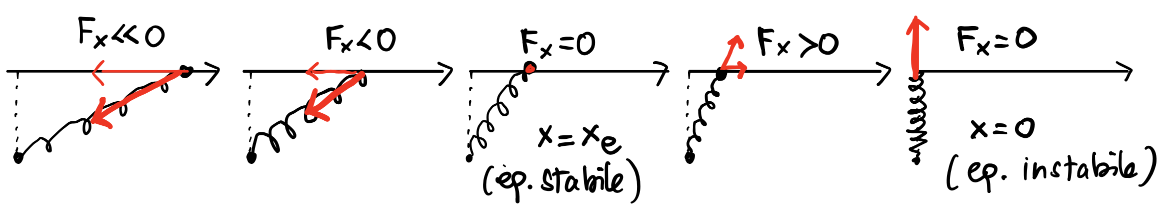
(b) L'energia potenziale è

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}k\,\Delta^2 x = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{x^2+D^2} - l_0\right]^2 = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{x^2+D^2} - D - a\right]^2.}$$

(c) Le posizioni di equilibrio ($F_x = 0$) sono

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \text{ (instabile, max di } U(x)) \\ \text{e } x = \pm x_e \text{ (stabile, min di } U(x)). \end{array}}$$

NB: i grafici (e le espressioni) descrivono queste configurazioni:



(d) Per passare da $+x_e$ a $-x_e$ (o viceversa) la massa deve avere l'energia cinetica tale che

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}ka^2 \iff v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,a \quad \left[\sqrt{\frac{300\,N/m}{0.1\,kg}} \times 0{,}02\,m = 1.10\ m/s\right]}$$

(e) Attorno alle posizioni di equilibrio stabile, $x=\pm x_e$, la massa compie oscillazioni armoniche per piccoli spostamenti. Si può allora considerare lo sviluppo in serie della forza F_x o della sua energia potenziale attorno a $\pm x_e$:

$$U(x) = U(x_e) + (x-x_e)\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_e} + \frac{1}{2}(x-x_e)^2\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=x_e} + \cdots ;$$

essendo $x=\pm x_e$ un minimo si ha lo sviluppo quadratico per $x\simeq\pm x_e$

con $$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{dF_x}{dx} = -\frac{d}{dx}\left\{kx\left[\frac{l_0}{\sqrt{x^2+D^2}}-1\right]\right\} = k\left(\frac{l_0^2-D^2}{l_0^2}\right)$$

Quindi $U(x)\approx \frac{1}{2}k(x-x_e)^2\cdot\frac{l_0^2-D^2}{l_0^2}$ $\Rightarrow$ è un'energia armonica con pulsazione

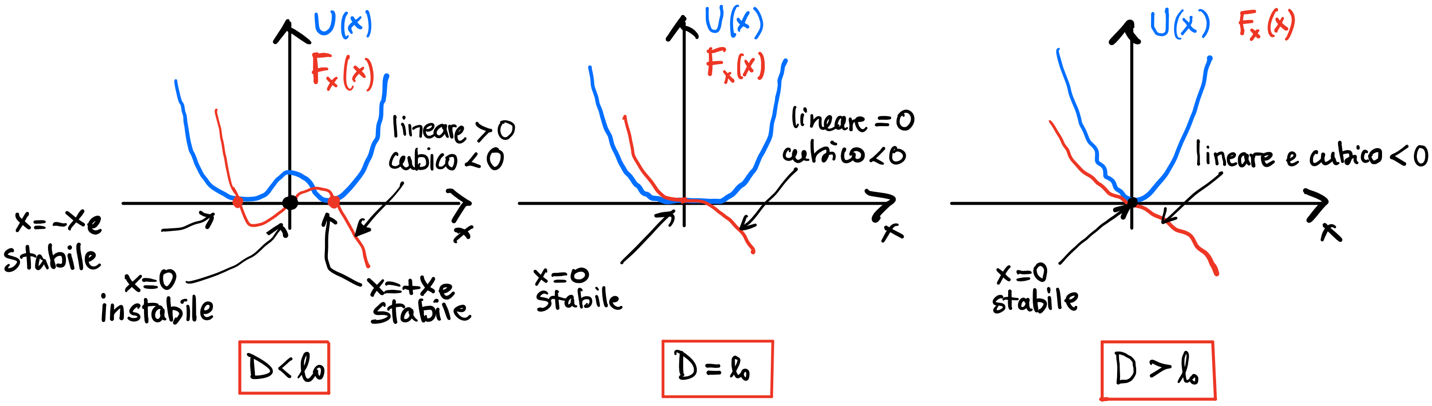
$$\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{l_0^2-D^2}{l_0^2}\right)} = \frac{1}{l_0}\sqrt{\frac{k}{m}a(2l_0-a)} \Rightarrow \boxed{T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = 2\pi l_0\sqrt{\frac{m}{ka(2l_0-a)}} = 0.41\ s}$$

(f) C'è equilibrio lungo y per cui $N=N_y=F_y=F\,\text{sen}\,\theta$,

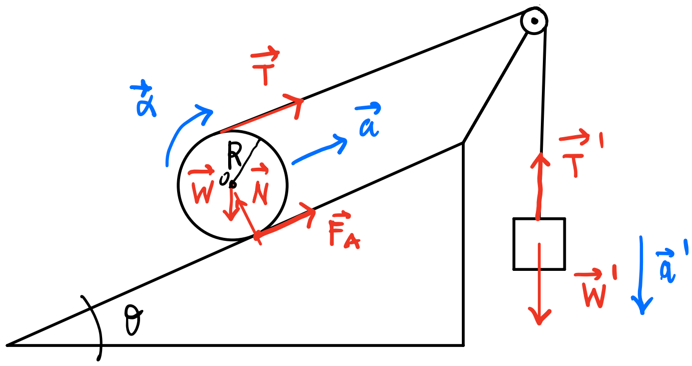
$$\text{sen}\,\theta = \frac{D}{\sqrt{x^2+D^2}} \Rightarrow \boxed{N_y = \frac{D\cdot k}{\sqrt{x^2+D^2}}\left[\sqrt{x^2+D^2}-l_0\right] = kD\left[1-\frac{l_0}{\sqrt{x^2+D^2}}\right]}$$

[eventualmente si può aggiungere il peso mg se la guida è collocata in un campo gravitazionale].

(g) Qui torna utile lo sviluppo in serie ottenuto prima: $F_x\simeq kx\left(\frac{l_0}{D}-1\right)-\frac{kx^3}{2D^2}$.
Si vede infatti che per $D=l_0$ resta una forza cubica in x con equilibrio in $x=0$ e U è non armonica (va come x^4). Per $D>l_0$ sia il termine lineare che quello cubico di F_x sono negativi: $x=0$ è ancora equilibrio stabile. In ogni caso, per $D\geq l_0$ non ci sono più i punti $\pm x_e$.



2



$|\vec{T}| = |\vec{T}'|$; $W = Mg$, $W' = mg$

$|\vec{a}| = |\vec{a}'|/2$

($\vec{a}'$ è l'accelerazione del punto di avvolgimento del filo sull'anello e dunque $a' = a + \alpha R = 2a$)

$$\begin{cases} Ma = T + F_A - Mg\sin\theta \\ I_0\alpha = \tau_0 = (T - F_A)R \\ ma' = mg - T = 2ma \end{cases}, \quad \begin{matrix} I_0 = MR^2 \\ \alpha = a/R \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} Ma = mg - 2ma + F_A - Mg\sin\theta \\ Ma = mg - 2ma - F_A \end{cases}$$

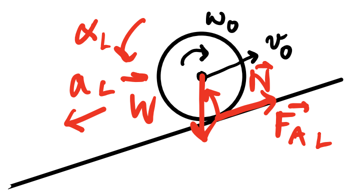
(a) $\Rightarrow \boxed{a' = \dfrac{2m - M\sin\theta}{(M+2m)}\, g}$ e (b) $\boxed{F_A = mg - (2m+M)\dfrac{a'}{2} = \dfrac{Mg}{2}\sin\theta}$

Non richiesto, ma si può anche ottenere l'espressione per la tensione del filo: $T = m(g - 2a) = mg\left[1 - \dfrac{2m - M\sin\theta}{M+2m}\right] = mg\left(\dfrac{M + M\sin\theta}{M+2m}\right)$ $\Rightarrow T = \dfrac{Mm}{M+2m}(1+\sin\theta)\cdot g$

(c) $\theta = 30°$, $M = 8.0$ kg, $m = 3.0$ kg $\Rightarrow a = \dfrac{a'}{2} = \dfrac{2\times3 - 8\times0.5}{2(8+2\cdot3)}\, g = \dfrac{g}{14} \cong 0.7\ m/s^2$

$v = at_0$, $\omega = \alpha t_0 = \dfrac{a}{R} t$ dopo $t_0 = 1\,s$ è $v_0 = 0.7\,m/s$, $\omega_0 = 5.8$ rad/s

Dopo la rottura del filo non c'è più $\vec{T}$ e dunque le equazioni cardinali si riducono alle



$$\begin{matrix} Ma_L = Mg\sin\theta - F_A \\ I_0\alpha_L = F_A R = MR^2 \cdot \dfrac{a_L}{R} \end{matrix} \quad \Rightarrow Ma_L = F_A,\ a_L = \dfrac{g}{2}\sin\theta,\ \alpha_L = a_L/R$$

dove "L" indica che l'anello ora è libero dalla massa m.

Quindi le leggi orarie del CM sono $\boxed{v = v_0 - a_L t \text{ e } \omega = \omega_0 - \alpha_L t}$

per cui l'anello si ferma all'istante $t_F = \dfrac{v_0}{a_L} = \dfrac{a}{a_L} t_0 = \dfrac{2m - M\sin\theta}{\sin\theta\,(M+2m)} \cdot t_0$

e poi ridiscende lungo il piano con velocità crescente $v = a_L t$

③ Sono dati i rapporti $\frac{V_B}{V_D} = r_1$, $\frac{V_C}{V_D} = r_2$ e $\gamma = c_p/c_v$

(a) Lungo le adiabatiche : $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$ $\quad T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}$;

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_B} = \frac{1}{r_1} \Rightarrow \boxed{\frac{T_B}{T_A} = r_1^{1-\gamma}}$$

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \; ; \quad \frac{T_C}{T_A} = \frac{T_C}{T_D} \cdot \frac{T_D}{T_A} = \left(\frac{V_D}{V_C}\right)^{\gamma-1} \cdot \frac{T_D}{T_A} \; ; \quad P_B = P_C \Rightarrow \frac{T_B}{V_B} = \frac{T_C}{V_C} \Rightarrow$$

$$T_C = T_B \cdot \frac{V_C}{V_B} = T_B \cdot \frac{V_C}{V_D} \cdot \frac{V_D}{V_B} = T_B \cdot \frac{r_2}{r_1} = T_A \cdot r_1^{1-\gamma} \cdot \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \boxed{\frac{T_C}{T_A} = \frac{r_2}{r_1^{\gamma}}} \, .$$

$$T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = T_A \cdot \frac{r_2}{r_1^{\gamma}} \cdot r_2^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{\frac{T_D}{T_A} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\gamma}}$$

(b) Essendo un ciclo : $Q = W = Q_{BC} + Q_{DA} = n\left[c_p (T_C - T_B) + c_v (T_A - T_D)\right] =$

$$= \frac{nRT_A}{2}\left[7\left(\frac{T_C}{T_A} - \frac{T_B}{T_A}\right) + 5\left(1 - \frac{T_D}{T_A}\right)\right] = \frac{nRT_A}{2}\left[7\left(\frac{r_2}{r_1^{\gamma}} - r_1^{1-\gamma}\right) + 5\left(1 - \frac{r_2^{\gamma}}{r_1^{\gamma}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = W = 8120 \text{ J}}$$

(c) $$\eta = \frac{W}{Q_{IN}} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{Q_{DA}} = 1 - \frac{c_p}{c_v}\frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} = 1 - \gamma \frac{\frac{T_B}{T_A} - \frac{T_C}{T_A}}{1 - \frac{T_D}{T_A}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\eta = 1 - \gamma \frac{r_1 - r_2}{r_1^{\gamma} - r_2^{\gamma}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\eta = 1 - \frac{7}{5}\frac{10-5}{10^{7/5} - 5^{7/5}} = 0.55 \; ; \\ &\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{MIN}}{T_{MAX}} = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 1 - \frac{r_2}{r_1^{\gamma}} = 0.80 > \eta \end{aligned}}$$

(d) $\Delta S_{DABC} = \Delta S_{DC}$ (è funzione di stato) e $\Delta S_{DC} = 0$ (adiabatica reversibile)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S_{DABC} = 0}$$

(e)