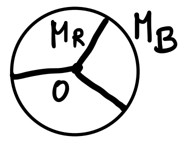
1

Momenti di inerzia

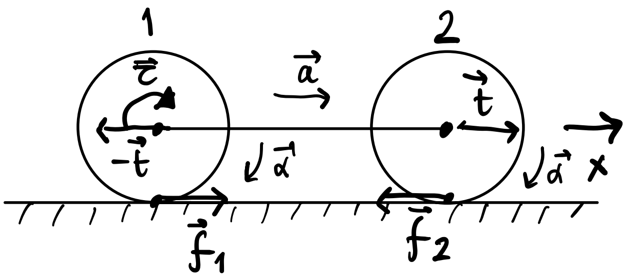


$M_R = M_B/3$

$$M = M_B + 3M_R = M_B + M_B = 2M_B$$

$$I_0 = M_B R^2 + 3 \times \left(\frac{M_R R^2}{3}\right) = $$
$$= (M_B + M_R) R^2 = \frac{4}{3} M_B R^2 = \frac{2}{3} M R^2$$

Quindi $\boxed{I_1 = 2m_1 R^2/3, \quad I_2 = 2m_2 R^2/3}$.



condizione di puro rotolamento
$a = \alpha_1 R = \alpha_2 R$

Equazione del moto lungo x

$$\begin{cases} m_1 a = f_1 - t \\ m_2 a = t - f_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \alpha = \tau - R f_1 \\ I_2 \alpha = R f_2 \end{cases}$$

(a) Si ricava $(m_1+m_2)a = f_1 - f_2$; $(I_1 + I_2)\alpha = \tau - R(f_1 - f_2) = \tau - aR(m_1 + m_2)$

$$\Rightarrow (m_1+m_2) \cdot \frac{5}{3} a R = \tau \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{5} \frac{\tau}{R} \frac{1}{(m_1+m_2)}}$$

(b) $$f_1 = \frac{\tau}{R} - \frac{I_1 \alpha}{R} = \frac{\tau}{R} - \frac{2}{3} m_1 a = \frac{\tau}{R}\left[1 - \frac{2}{5}\frac{m_1}{m_1+m_2}\right] = \boxed{\frac{\tau}{R}\frac{3m_1 + 5m_2}{5(m_1+m_2)}}$$

$$f_2 = \frac{I_2 \alpha}{R} = \frac{2}{3} m_2 a = \boxed{\frac{2}{5}\frac{\tau}{R}\frac{m_2}{m_1+m_2}}$$

(c) $$t = m_2 a + f_2 = \frac{5}{3} m_2 a = \boxed{\frac{\tau}{R}\frac{m_2}{m_1+m_2}}$$

(d) Condizione di puro rotolamento : $f_1 < f_{MAX} = \mu_s m_1 g \Rightarrow \frac{\tau}{R}\frac{3m_1 + 5m_2}{5(m_1+m_2)} < \mu_s m_1 g$

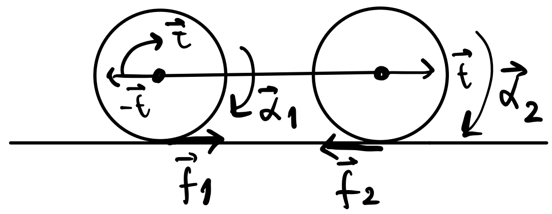
$$\Rightarrow \boxed{\tau < 5\mu_s R g \frac{m_1(m_1+m_2)}{3m_1 + 5m_2}}$$

(e) Se $m_2 = 2m_1$, dai risultati precedenti si ottiene

$f_1 = \frac{13}{15}\frac{\tau}{R}$, $f_2 = \frac{4}{15}\frac{\tau}{R}$, $t = \frac{2}{3}\frac{\tau}{R}$ e, per $\frac{\tau}{R} = 60\,N$, $\boxed{f_1 = 42\,N, f_2 = 16\,N, t = 40\,N}$

Se è poi $m_1 = 10\,kg$, $m_2 = 20\,kg$, $\tau/R = 60\,N$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = \frac{6}{5}\frac{m}{s^2} = 1.2\,m/s^2}$

(f) Le equazioni del moto, ipotizzando lo slittamento dinamico della ruota 1, diventano



$m_1 a = f_1 - t$, $m_2 a = t - f_2$

mentre $I_1 \alpha_1 = \tau - R f_1$, $I_2 \alpha_2 = R f_2$

dove ora $a = \alpha_2 R \neq \alpha_1 R$

e $\boxed{f_1 = \mu_D m_1 g}$ (c'è scivolamento). Si ha ancora che

$$(m_1 + m_2) a = f_1 - f_2 = \mu_D m_1 g - \frac{2}{3} m_2 a \Rightarrow \boxed{a = 3\mu_D g \frac{m_1}{3m_1 + 5m_2}};$$

$$\boxed{f_2 = \frac{2}{3} m_2 a = 2\mu_D g \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 5m_2}}; \quad \boxed{t = m_2 a + f_2 = 5\mu_D g \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 5m_2}}$$

(g) per $\mu_D = 0.5$, $R = 50\,cm$ e $m_2 = 2m_1$ è

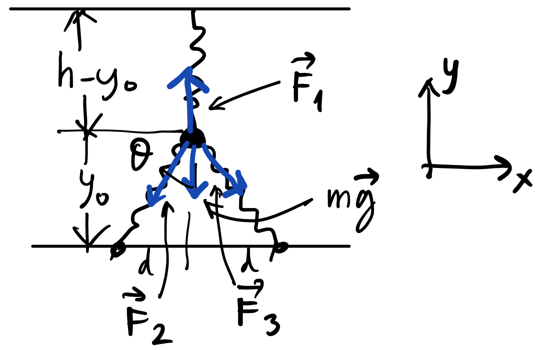
$$\boxed{\begin{array}{l} a = 3 \times 0.5 \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times \frac{1}{13} = 1.13 \frac{m}{s^2} \\ \alpha_2 = a/R = 2.26\,rad/s^2 \end{array}}$$

(h) $\alpha_1 = \dfrac{\tau - R f_1}{I_1} = \dfrac{\tau - \mu_D R m_1 g}{\frac{2}{3} m_1 R^2}$; sapendo che $\frac{\tau}{R} = 120\,N$ è
$\tau = 60\,N \cdot m$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{(60 - 0.5 \times 0.5 \times 10 \times 9.8)\,N \cdot m}{\frac{2}{3} \cdot 10\,kg \times (0.5\,m)^2} = 21.3 \frac{rad}{s^2}}$$

2

(a) Posizione di equilibrio: deve essere simmetrica per bilanciare le forze orizzontalmente:



Lungo y:

$$-mg + F_1 - F_2\cos\vartheta - F_3\cos\vartheta = 0,$$

$$F_1 = k(h-y_0);\ F_2 = F_3 = k\sqrt{d^2+y_0^2}, \quad \cos\vartheta = \frac{y_0}{\sqrt{d^2+y_0^2}}$$

$$\Rightarrow mg - k(h-y_0) + 2ky_0 = 0 \quad \Rightarrow 3ky_0 = kh - mg$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{1}{3}\left(h - mg/k\right)}$$

(b) Conservazione dell'energia: $E_i = 2\cdot\frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}kh^2$

$$E_f = 2\cdot\frac{1}{2}k(d^2+y_{MAX}^2) + mg\,y_{max} + \frac{1}{2}k(h-y_{max})^2$$

$$\Rightarrow 2kd^2 + \tfrac{1}{2}kh^2 = k(d^2+y_{max}^2) + mg\,y_{max} + \tfrac{1}{2}k(h-y_{max})^2$$

$\Rightarrow$ (sviluppando e semplificando) $\boxed{y_{max} = \frac{2}{3}\left(h - \frac{mg}{k}\right) = 2y_0}$

(c) Si procede come nel caso (a) ma con la coordinata generica y:

$$m\ddot{y} = k(h-y) - 2k\sqrt{y^2+d^2}\cos\vartheta - mg, \quad \cos\vartheta = y/\sqrt{y^2+d^2}$$

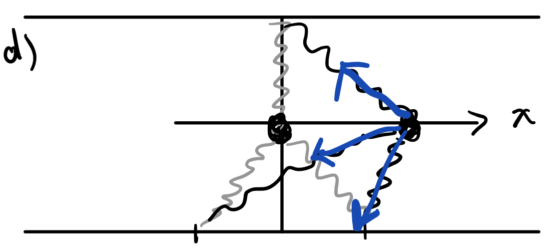
$$\Rightarrow \ddot{y} = -\frac{3k}{m}y + \frac{k}{m}\left(h - \frac{mg}{k}\right)$$ che dà origine a un

moto armonico semplice con frequenza $\nu_y = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}}$; valore numerico $\nu_y = 1/2\pi$ Hz $\simeq 0.16$ Hz

(d) Si procede come nel punto precedente per scrivere come equazione del moto la forma armonica:

$$F_{1,x} = -kx,\quad F_{2,x} = -k(d+x),\quad F_{3x} = -k(x-d)$$

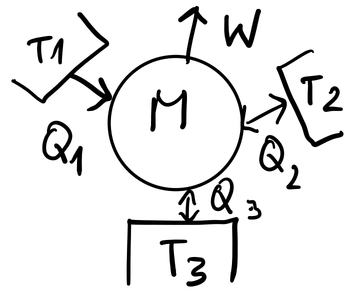
$$\Rightarrow F_x = -3kx$$



$$\boxed{m\ddot{x} = -3kx \Rightarrow \nu_x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}} = \nu_y}$$

3

(a) In un ciclo di funzionamento per il I principio è



$$W = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{5}{3} Q_1$$

e l'entropia dell'universo varia, per il II principio, della quantità

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} = \frac{3}{2}\frac{Q_1}{T} .$$

In queste espressioni i calori hanno segno secondo la solita convenzione ($Q>0$ entrante nella macchina).

Dai dati del problema:

$$-\frac{Q_1}{T} - \frac{4Q_2}{3T} - \frac{4Q_3}{T} = \frac{3}{2}\frac{Q_1}{T} \iff \frac{5}{2}Q_1 + \frac{4}{3}Q_2 + 4Q_3 = 0$$

che va unita in sistema con la

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{5}{2}Q_1 + \frac{4}{3}Q_2 + 4Q_3 = 0 \\ -\frac{2}{3}Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \end{array}\right. .$$

Sviluppando $\begin{cases} 15Q_1 + 8Q_2 + 24Q_3 = 0 \\ -2Q_1 + 3Q_2 + 3Q_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 15Q_1 + 8Q_2 + 24Q_3 = 0 \\ -16Q_1 + 24Q_2 + 24Q_3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 31Q_1 - 16Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = \frac{31}{16}Q_1 \Rightarrow Q_3 = -Q_2 + \frac{2}{3}Q_1 = \left(-\frac{31}{16} + \frac{2}{3}\right)Q_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_2 = \frac{31}{16}Q_1 , \quad Q_3 = -\frac{61}{48}Q_1}$$

per cui Q_2 è assorbito e Q_3 ceduto dalla macchina.

(b) $$\eta = \frac{W}{Q_{IN}} = \frac{5/3\ Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{5/3}{1 + 31/16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{16}{47} \boxed{= \frac{80}{141}}$$

(c) $$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = \frac{Q_1}{T} + \frac{31}{16}Q_1 \cdot \frac{4}{3T} - \frac{61}{48}Q_1 \cdot \frac{4}{T} = \boxed{-\frac{3}{2}\frac{Q_1}{T} < 0 \text{ (Clausius)}}$$

(d) $W^R = Q_1 + Q_2 + Q_3^R$; $-Q_1/T_1 - Q_2/T_2 - Q_3^R/T_3 = 0$ da cui, risolvendo come sopra, $Q_3^R = -43Q_1/48$, $W^R = 98Q_1/48$

$$\boxed{\Rightarrow \eta^R = W^R/(Q_1+Q_2) = 98/141 < \frac{T_3}{T_1} = \frac{3}{4} \text{ (Carnot)}}$$

4

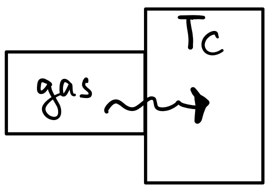
(a) Nell'espansione isoterma (dunque reversibile) da V_1 a V_2

$$\boxed{\begin{aligned} V_2 &= V_1 P_1/P_2 = 10\ \ell \\ W_{12} &= \int_1^2 P\,dV = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = P_1V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 6.9\ \ell\cdot\text{atm} = 702\ \text{J} \end{aligned}}$$

(b)

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta S_{12\,gas} &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_1} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{P_1V_1}{T_1} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 2.33\ \text{J/K} \\ \Delta S_{12\,amb} &= -\Delta S_{12\,gas} = -2.33\ \text{J/K}, \quad \Delta S_u = 0\ \text{J/K} \end{aligned}}$$

(c)



Scambio termico a volume costante:

$$\delta Q = n c_v\, dT \qquad (gas)$$

$$Q_c = \int_c^f C(T)\, dT = a(T_f - T_c) + \frac{b}{2}(T_f^2 - T_c^2)$$

T_c è la temperatura iniziale del solido,
T_f quella finale di equilibrio:

$$n c_v (T_i - T_f) = a(T_f - T_c) + \frac{b}{2}(T_f^2 - T_c^2)$$

ovvero $$\frac{b}{2}T_f^2 + T_f(a + n c_v) - \left(a T_c + \frac{b}{2}T_c^2 + n c_v T_i\right) = 0$$

con T_f incognita, $T_c = 200\ \text{K}$, $T_i = 300\ \text{K}$, $n = \frac{P_1V_1}{RT_1} = 0.41$ moli

Risolvendo l'equazione quadratica $\boxed{T_f = 210\ \text{K}}$

(d) $\boxed{\Delta H = \Delta U + V\Delta P = n c_v \Delta T + V\Delta P = -763\ \text{J}}$

(e)

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta S_c &= \int_{T_c}^{T_f} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_c}^{T_f} \frac{(a + bT)}{T}\, dT = a \ln\left(\frac{T_f}{T_c}\right) + b(T_f - T_c) = 2.19\ \text{J/K} \\ \Delta S_g &= n c_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -1.81\ \text{J/K}; \quad \Delta S_u = \Delta S_c + \Delta S_g = 0.38\ \text{J/K} \end{aligned}}$$