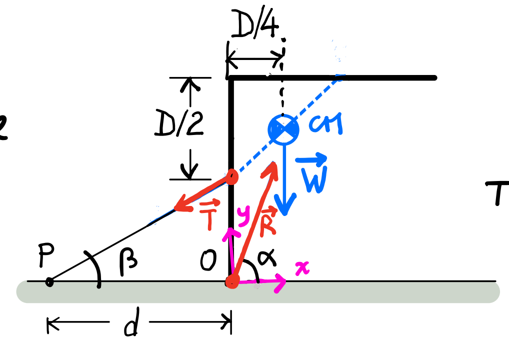
①

(a) condizioni di equilibrio iniziale



$$\begin{cases} \vec{T}+\vec{R}+\vec{W}=\vec{0} \\ \vec{\tau}_Q=\vec{0} \quad \text{(qualsiasi polo Q).} \end{cases}$$

$|\vec{W}| = 2mg$

$T_y = T_x \, tg\beta = T_x \cdot \frac{D}{2d}$

Preso $Q \equiv O$, proiezioni su Oxy: $\begin{cases} R_y + T_y - 2mg = 0; \quad \tau_O = \frac{D}{2}T_x + \frac{D}{4}W = 0 \\ R_x + T_x = 0 \end{cases}$

[$\frac{D}{4}$ è il braccio di $\vec{W}$ rispetto a O].

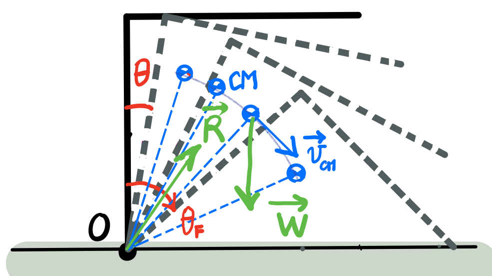
$\Rightarrow T_x = -\frac{W}{2} = -mg = -R_x \;, \quad R_y = -T_y + 2mg = -T_x \cdot \frac{D}{2d} + 2mg = mg\left(\frac{D}{2d}+2\right)$

Per cui $\boxed{T = mg\sqrt{1+\frac{D^2}{4d^2}} \;, \quad R = mg\sqrt{1+\left(2+\frac{D}{2d}\right)^2}}$

e gli angoli sono tali che $\boxed{tg\beta = D/2d \;, \quad tg\alpha = 2 + D/2d \,.}$

Il traliccio ruota liberamente attorno al perno O sotto l'azione non equilibrata del momento che il peso $\vec{W}$ genera rispetto a O. Tutti i punti del sistema compiono un moto di rotazione non uniforme attorno all'asse fisso passante per O.

Siccome le due travi hanno la stessa lunghezza, il contatto con il suolo avviene come nel disegno quando $\theta_F = \pi/4$.



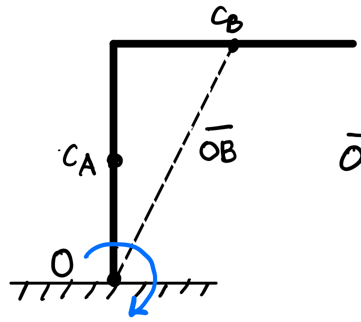
Anche il centro di massa procederà di moto circolare accelerato attorno a O. Il moto del traliccio sarà regolato dalle equazioni cardinali:

$$\begin{cases} \vec{R}+\vec{W} = (2m)\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau}_O = \vec{r}_{CM}\times\vec{W} = I_O\vec{\alpha} \end{cases}$$

in cui $\vec{R}$ è la reazione in O incognita e $\vec{W} = (2m)\vec{g}$ è il peso costante.

(b) Calcolo del momento di inerzia

Si sommano i due momenti di inerzia delle travi (A e B, con centri C_A e C_B) rispetto il polo O :



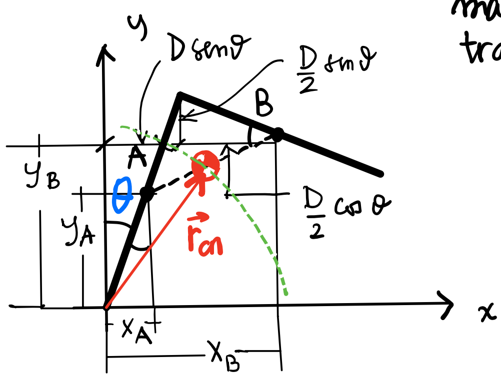
$$\overline{OB}^2 = \frac{5}{4} D^2$$

$$I_{A_O} = \frac{mD^2}{3} \; ; \quad I_{B_O} = \frac{mD^2}{12} + m\,\overline{OB}^2 \quad \text{(per il teorema di Huygens-Steiner).}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_O = I_{A_O} + I_{B_O} = \frac{mD^2}{3} + \frac{mD^2}{12} + \frac{5}{4} mD^2 = \frac{5}{3} mD^2}$$

(oppure $I_O = \frac{5}{6} MD^2$ se $M = 2m$ è la massa totale del traliccio).

(c) coordinate del CM in Oxy



$$x_A = \frac{D}{2}\,\text{sen}\,\theta, \quad y_A = \frac{D}{2}\cos\theta$$

$$x_B = \frac{D}{2}(\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta), \quad y_B = \frac{D}{2}(2\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_{cm} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{D}{4}(3\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta) \\ y_{cm} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{D}{4}(3\cos\theta - \text{sen}\,\theta) \end{cases}}$$

NB $r_{cm} = \sqrt{x_{cm}^2 + y_{cm}^2} = D\frac{\sqrt{10}}{4}$ che è il raggio della circonferenza che percorre il CM durante il moto.

(d) A partire dalla II equazione cardinale, $\vec{\tau}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{W} = I_O \vec{\alpha}$:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{W} = x_{cm}(2mg)\hat{k} = mg \cdot \frac{D}{2}(3\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta)\hat{k} = I_O \ddot{\theta}\,\hat{k} = \frac{5}{3} mD^2 \ddot{\theta}\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{3}{10}\frac{g}{D}(3\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta) = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$ che si integra con la solita tecnica :

$$\int_{\omega_i=0}^{\omega} \omega' d\omega' = \int_{\theta_i=0}^{\theta} \frac{3}{10}\frac{g}{D}(3\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta)\,d\theta = \frac{3}{10}\frac{g}{D}(\sin\theta - 3\cos\theta + 3) = \frac{\omega^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega(\theta) = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{g}{D}(\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta + 3)}}$$

$$\boxed{\text{e} \quad v_{cm} = \omega r_{cm} = \omega \cdot \frac{D}{4}\sqrt{10} = \sqrt{\frac{3}{8} gD\,(\sin\theta - 3\cos\theta + 3)}}$$

Lo stesso risultato si ottiene equivalentemente con la conservazione della energia meccanica:

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = -\Delta U = -2mg\,\Delta y_{cm}, \quad \Delta y_{cm} = y_{cf} - y_{ci} = \frac{D}{4}(3\cos\theta - \text{sen}\,\theta - 3)$$

$\Rightarrow \quad \omega(\theta)$ come sopra.

(e) Nel punto di contatto con il suolo $\theta = \theta_F = \pi/4$ per cui

$$\boxed{\omega_F = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{g}{D}(3-\sqrt{2})} \quad , \quad v_{cm_F} = \sqrt{\frac{3}{8} g D (3-\sqrt{2})}}$$

e, con i valori numerici assegnati,

$$\boxed{\omega_F = 1.53 \text{ rad/s} \quad , \quad v_{cm_F} = 4.83 \text{ m/s}}$$

(f) Tutto dipende dall'equazione differenziale già ottenuta per

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3}{5}\frac{g}{D}(\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta + 3)}$$ che è integrabile se si risolve

l'integrale $\boxed{t = \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3}{5}\frac{g}{D}(\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta + 3)}}}$ che però è ellittico e dunque non ha soluzione analitica.

(g) si utilizzano le componenti cartesiane della I equazione cardinale:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_{cm} &= R_x \\ 2m\ddot{y}_{cm} &= R_y - W = R_y - 2mg \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} R_x &= 2m\ddot{x}_{cm} \\ R_y &= 2m(\ddot{y}_{cm} + g). \end{aligned}$$

Per ottenere le accelerazioni delle componenti del centro di massa basta svolgere le derivate temporali di x_{cm} e y_{cm} già ottenute:

$$\dot{x}_{cm} = \frac{D}{4}(3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\dot{\theta}, \quad \dot{y}_{cm} = -\frac{D}{4}(3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\dot{\theta};$$

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{D}{4}\left[-(3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\dot{\theta}^2 + (3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\ddot{\theta}\right]; \quad \ddot{y}_{cm} = -\frac{D}{4}\left[(3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\dot{\theta}^2 + (3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\ddot{\theta}\right]$$

Queste espressioni vanno valutate all'angolo di impatto, $\theta = \theta_F = \pi/4$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_{cm}(\theta_F) = \frac{\sqrt{2}D}{4}\left(-2\omega_F^2 + \ddot{\theta}_F\right), \quad \ddot{y}_{cm}(\theta_F) = -\frac{\sqrt{2}D}{4}\left(\omega_F^2 + 2\ddot{\theta}_F\right)$$

e si usano i valori in $\theta = \theta_F$ per ω^2 e $\ddot{\theta}$ delle espressioni sopra ottenute:

$$\omega_F^2 = \frac{3}{5}\frac{g}{D}(3-\sqrt{2}) \quad , \quad \ddot{\theta}_F = \frac{3\sqrt{2}}{5}\frac{g}{D}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_{cm}(\theta_F) = \frac{9}{10}(1-\sqrt{2})g, \quad \ddot{y}_{cm} = -\frac{3\sqrt{2}}{20}(3+\sqrt{2})g$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_x = \frac{9}{5}(1-\sqrt{2})\,mg \quad , \quad R_y = \frac{14-9\sqrt{2}}{10}\,mg}$$

numericamente
$R_x = -731$ N, $R_y = 127$ N

②

(a) all'equilibrio iniziale è $P_{A_i} = F_0/A$ (per definizione di pressione)
e dunque

$$P_{A_i} = \frac{n_A R T_0}{V_{A_i}} = \frac{n_A R T_0}{A(L-x_0)} = \frac{F_0}{A} \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{F_0}{n_A R}(L-x_0)\,;}$$

(b) ancora all'equilibrio, tenendo conto della forza che la molla esercita sul setto divisore, eguagliando le forze rapportate all'area:

$$A P_{A_i} = A P_{B_i} - k(x_0 - l_0)$$

[se $x_0 > l_0$ la molla è dilatata e "aiuta" la pressione in A]

$$\Rightarrow \frac{n_A R T_0}{L-x_0} = \frac{n_B R T_0}{x_0} - k(x_0 - l_0)$$

$$\Rightarrow l_0 = x_0 - \frac{1}{k} R T_0 \left(\frac{n_B}{x_0} - \frac{n_A}{L-x_0}\right) = \boxed{x_0 - \frac{F_0}{k}\left[\frac{n_B}{n_A}\left(\frac{L-x_0}{x_0}\right) - 1\right]}$$

(c) L'energia interna del gas aumenta grazie all'energia potenziale elastica rilasciata dalla molla secondo il bilancio

$$\Delta U = c_v (n_A + n_B)(T_f - T_0) = \frac{1}{2} k (x_0 - l_0)^2 \quad , \quad c_v = \frac{3}{2} R$$

$$\Rightarrow \boxed{T_f = T_0 + \frac{k(x_0 - l_0)^2}{3R(n_A + n_B)}}$$

(d) Il processo è irreversibile (si tratta di un'espansione libera dei due volumi iniziali dei gas). Basta quindi calcolare per i due gas le ΔS riferite a processi che reversibilmente li accompagnano dalle coordinate iniziali a quelle finali:

$$\Delta S_A = n_A c_v \ln \frac{T_f}{T_0} + n_A R \ln \frac{V_f}{V_{A_i}} = n_A R \left(\frac{3}{2} \ln \frac{T_f}{T_0} + \ln \frac{L}{L-x_0}\right);$$

$$\Delta S_B = n_B c_v \ln \frac{T_f}{T_0} + n_B R \ln \frac{V_f}{V_{B_i}} = n_B R \left(\frac{3}{2} \ln \frac{T_f}{T_0} + \ln \frac{L}{x_0}\right).$$

$$\boxed{\Delta S_{univ} = \Delta S_A + \Delta S_B = (n_A + n_B) \cdot \frac{3}{2} R \cdot \ln \frac{T_f}{T_0} + R\left[n_A \ln \frac{L}{L-x_0} + n_B \ln \frac{L}{x_0}\right]}.$$

(e) valori numerici: $\boxed{T_0 = 157.9\ \text{K},\ l_0 = 3.3\ \text{m},\ T_f = 165.1\ \text{K} \quad \Delta S_{univ} = 6.3\ \text{J/K}}$

③

(a) Si utilizza la legge di Fourier per la conduzione termica nella forma

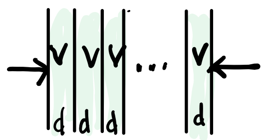
$$|\dot{Q}| = kA\frac{\Delta T}{d}\ (\text{watt}) \;\rightarrow\; |\dot{q}| = \frac{|\dot{Q}|}{A} = \frac{\Delta T}{r}\ \left(\frac{\text{watt}}{m^2}\right)$$

dove $r = \frac{d}{k}$ è la resistività termica per la singola lamina a facce piane e parallele di spessore d e conducibilità k.

Per più lamine « in serie » – cioè affiancate parallelamente tra di esse, la resistività è data da $r_{TOT} = \sum_{1}^{N} d_i/k_i$

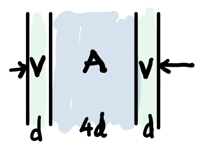
Nel caso di N lamine eguali con conducibilità k_V (vetro) è

$$r^{(1)}_{TOT} = \frac{Nd}{k_V};$$



con 2 lamine di vetro con un'intercapedine di aria (k_A) di spessore $4d$ è

$$r^{(2)}_{TOT} = \frac{2d}{k_V} + \frac{4d}{k_A} = 2d\left(\frac{1}{k_V} + \frac{2}{k_A}\right)$$



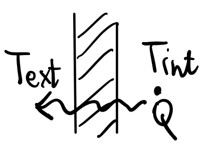
con $K_A = k_V/40 \Rightarrow r^{(2)}_{TOT} = 2d\left(\frac{1}{k_V} + \frac{80}{k_V}\right) = \frac{162d}{k_V}$.

Quindi $r^{(2)}_{TOT} = r^{(1)}_{TOT}$ se $N = 162$ (ci vogliono 162 lastre di vetro per ottenere la stessa conducibilità del doppio vetro con aria).

(b) Il flusso stazionario di energia tra ambiente esterno e interno (due termostati) implica un flusso anche di entropia costante nel tempo perché c'è passaggio spontaneo di energia dal serbatoio più caldo a quello più freddo (la finestra non cambia il suo stato termodinamico per cui non contribuisce alla variazione di entropia):

$$\Delta S_{univ} = \frac{Q}{T_{EXT}} - \frac{Q}{T_{INT}} = Q\left(\frac{1}{T_{EXT}} - \frac{1}{T_{INT}}\right);$$

qui $Q = \dot{Q}\,\Delta t$ dove Δt è il tempo trascorso e $\dot{Q}$ è il flusso già calcolato:



$$\dot{Q} = -\frac{A(T_{EXT} - T_{INT})}{r_{TOT}} \Rightarrow \boxed{\Delta S_{univ} = \frac{A \cdot \Delta t}{r_{TOT}} \frac{(T_{INT} - T_{EXT})^2}{T_{INT} T_{EXT}}}$$

con $r_{TOT} = \frac{162d}{k_V} \simeq 0.32\ \frac{K \cdot m^2}{W}$, $A = 2\ m^2$, $\Delta t = 24h \simeq 3.8 \times 10^4 s$ $\Rightarrow \boxed{\Delta S_{univ} \simeq 3.7 \times 10^3\ J/K}$