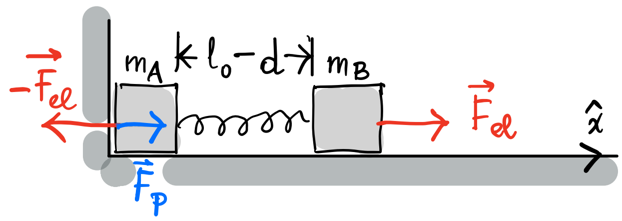
1



$\vec F_p$ è la forza vincolare che la parete esercita su m_A finché c'è contatto.
$\vec F_{el}$ è la forza elastica di risposta alla deformazione della molla.

Finché la molla è compressa, sulla massa di sinistra deve agire, oltre alla forza elastica, anche la reazione vincolare tale da mantenere il blocchetto in equilibrio, ovvero $|\vec F_p| = |\vec F_{el}|$, $\vec F_{el} = -k(l_0-d)\,\hat x$;

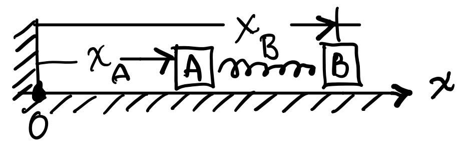
nel momento in cui m_B è nella posizione di riposo della molla, cioè nel punto tale che $\vec F_{el} = \vec 0$, deve quindi anche valere che $|\vec F_P| = 0$ e la massa m_A si stacca dalla parete verticale.

(a) Punto di distacco : $x_B^{(distacco)} = l_0$ e per la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m_B v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{k/m_B}\cdot d$$

(b) Equazioni del moto dopo il distacco di m_A (c'è solamente F_{el}):

$$m_A a_A = k(x_B - x_A - l_0); \quad m_B a_B = -k(x_B - x_A - l_0).$$



Queste equazioni descrivono il consueto problema a due corpi con moto (rettilineo) uniforme del CM e oscillazione armonica della coordinata relativa $x_{AB} = x_B - x_A - l_0$; sottraendole:

$$a_A - a_B = k\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)(x_B - x_A - l_0) \Rightarrow \ddot x_{AB} = -\frac{k}{\mu_{AB}}x_{AB}$$

per cui $x_B - x_A = l_0 + D\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$ con $\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu_{AB}}}$, $\mu_{AB} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$

(c) Moto CM: $(m_A + m_B)a_{cm} = m_A a_A + m_B a_B = 0 \Rightarrow x_{cm} = v_{cm}t$, $v_{cm} = \frac{m_B}{m_A+m_B}v_B = \frac{\sqrt{k m_B}}{m_A+m_B}d$

(d) Le leggi orarie della coordinata relativa sono $\begin{cases} x_{AB} = l_0 + D\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi) \\ v_{AB} = \dot x_{AB} = \omega D\cos(\omega t+\phi) \end{cases}$

$x_A(0) = 0$, $x_B(0) = l_0$; $v_A(0) = 0$, $v_B(0) = \sqrt{\frac{K}{m_B}}\,d$

$\Rightarrow D = d\sqrt{m_A/(m_A+m_B)}$, la massima distanza tra le masse è $l_0 + D$

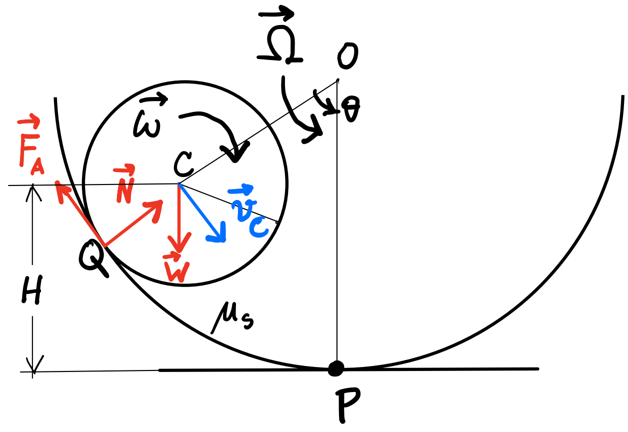
(e) Scomposizione dell'energia $E_{TOT} = \frac{1}{2}(m_A+m_B)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu_{AB}v_{AB}^2 + \frac{1}{2}k(x_B-x_A-l_0)^2 =$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_B}{m_A+m_B}kd^2 + \frac{1}{2}\frac{m_A}{m_A+m_B}kd^2 = \frac{1}{2}kd^2; \text{ se } m_A = \frac{m_B}{2},\ E_{cm} = \frac{1}{3}kd^2,\ E_{REL} = \frac{1}{6}kd^2$$

②

(a) Durante il rotolamento puro si ha che

$$\vec{v}_c = \vec{\omega}\times\vec{QC} = \vec{\Omega}\times\vec{OC}\,, \quad \begin{cases} |\vec{QC}| = r \\ |\vec{OC}| = (R-r) \end{cases}$$



per cui ω (velocità angolare attorno a C) e Ω (velocità angolare attorno a O) sono legate dalla

$$\omega r = \Omega(R-r)$$

(b) L'unica forza che lavora è il peso $\vec{W}$ per cui si può applicare la conservazione dell'energia:

$$E_i = E(y=H) = 0 = E_f = E(y) = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 - Mg(H-y)$$

con $v_c = \omega r$ e $I_c = MK_c^2$, $K_c^2 = r^2/2$ per un cilindro omogeneo:

$$v_c^2\left(1+\frac{K_c^2}{r^2}\right) = \frac{3}{2}v_c^2 = 2g(H-y) \Rightarrow v_c(y) = \sqrt{\frac{4}{3}g(H-y)}.$$

Nel punto inferiore P è $y=r \Rightarrow v_P = \sqrt{\frac{4}{3}g(H-r)}$

(c) E' sufficiente applicare ancora la conservazione dell'energia dal punto P di minima quota al punto in cui il cilindro si porta prima di annullare la sua velocità SOLO di traslazione (per effetto del peso): la velocità di rotazione (e dunque l'energia cinetica associata) non cambia perché non c'è attrito:

$$E_i = E_P = \frac{1}{2}Mv_P^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_P^2 + Mgr = E_F = \frac{1}{2}I_c\omega_P^2 + MgH' \Rightarrow H' = \underline{\frac{r+2H}{3}}$$

(d) La proiezione tangenziale dell'equazione del moto del CM del cilindro è

$$M(R-r)\ddot{\theta} = Mg\sin\theta - F_A \quad \text{dove } \theta \text{ è l'angolo polare di } \vec{OC}.$$

La seconda equazione cardinale è $I_c\ddot{\phi} = rF_A$ dove ϕ è l'angolo di $\vec{CQ}$,

per cui $rF_A = I_c\ddot{\phi} = MK_c^2\left(\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\theta} \Rightarrow M(R-r)\ddot{\theta} = \frac{r^2}{K_c^2}F_A \Rightarrow$

$$F_A = Mg\sin\theta - M(R-r)\ddot{\theta} = Mg\sin\theta\left(1-\frac{r^2}{K_c^2}F_A\right) \Rightarrow \quad F_A = \frac{Mg\sin\theta}{1+r^2/K_c^2} = \frac{1}{3}Mg\sin\theta.$$

(e) $\omega_P = v_P/r\,, \quad \Omega_P = \omega_P\dfrac{r}{R-r} = \dfrac{v_P}{R-r}\,; \quad v_P = 2.04\ \mathrm{m/s}\,; \quad \omega_P = 12.8\ \mathrm{rad/s}$

$\Omega_P = 4.3\ \mathrm{rad/s}$

③ Indichiamo con A e B i gas a sinistra e a destra, rispettivamente.

Numero di moli a destra: $n_B = \frac{p_B^0 V_B^0}{RT_0}$, $p_B^0 = 0.95$ bar, $V_B^0 = 6\,\ell$, $T_0 = 230$ K $\Rightarrow n_B = 0.30$ moli

(a) Bilancio energetico durante la compressione adiabatica reversibile di B:

$\Delta U_B = n c_V (T_B - T_0) = -W = W_F$ dove W_F è il lavoro subito dal gas ed è quello fatto dalla forza sul pistone F;

$\Rightarrow \frac{T_B}{T_0} = \frac{2W_s}{3p_B^0 V_B^0} + 1 = 1.70 \Rightarrow T_B = 391$ K; Inoltre: $p\,T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{cost} \Rightarrow p_B = p_B^0 \left(\frac{T_B}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 3.6$ bar

(b) Conservazione energia nel mescolamento dei gas dopo la rottura del divisorio:

$$\Delta U_{TOT} = \Delta U_A + \Delta U_B = (n_A c_{VA} + n_B c_{VB})(T_f - T_0) = W_S$$

[la trasformazione è adiabatica e il ΔT dei due gas è lo stesso]

$$\Rightarrow \quad T_f = T_0 + \frac{2W_s}{R(5n_A + 3n_B)} = 273 \text{ K}$$

(c) Prima della rottura della parete interna i gas si trasformano adiabaticamente e reversibilmente $\Rightarrow \Delta S_A^{gas} = \Delta S_B^{gas} = 0$, $\Delta S^{amb} = 0$, $\Delta S^{univ} = 0$.

Dopo la rottura i gas si mescolano in modo irreversibile. Per calcolare ΔS si usano trasformazioni reversibili che connettono gli stessi stati.

Osserviamo che prima dell'apertura B occupa il volume $V_B = \frac{n_B R T_B}{p_B} = 2.7\,\ell$

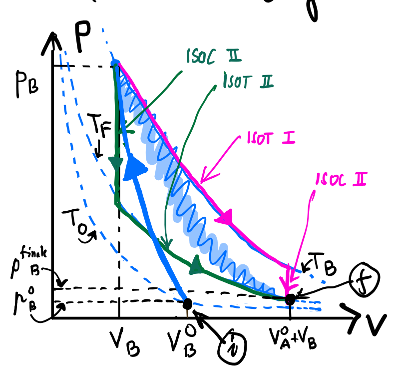
A: Usiamo isocora reversibile $T_0 \to T_f$ e isoterma reversibile $V_A^0 \to V_A^0 + V_B$

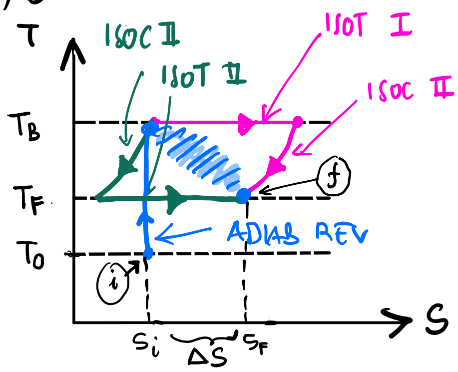
B: Usiamo isoterma $T = T_B$ con $V_B \to V_B + V_A^0$ e isocora reversibile $V = V_B + V_A^0$ con $T_B \to T_F$ (I)
(oppure isocora reversibile $V = V_B$ con $T_B \to T_F$ e isoterma $T = T_F$ con $V_B \to V_B + V_A^0$) (II)

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta S_A = n_A c_{VA} \ln(T_f/T_0) + n_A R \ln\left(\frac{V_A^0 + V_B}{V_A^0}\right) = 3.9 \text{ J/K} \\ \Delta S_B = n_B c_{VB} \ln(T_f/T_B) + n_B R \ln\left(\frac{V_A^0 + V_B}{V_B}\right) = 0.9 \text{ J/K} \end{cases}$$

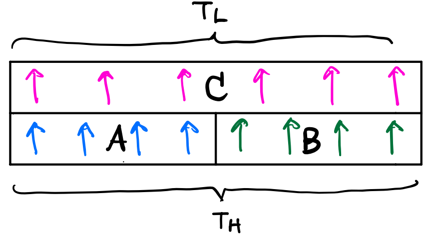
(d) $\Delta S_{amb} = 0$; $\Delta S_{univ} = \Delta S_A + \Delta S_B = 4.8$ J/K

(e) Limitatamente al gas di destra, B:



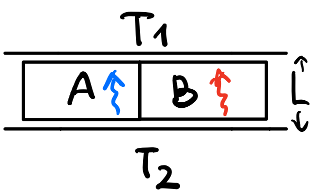


④ Le frecce rappresentano i flussi termici che attraversano i tre materiali.



(a) Usando la legge di Fourier $\dot{Q} = \dot{q}\mathcal{A} = k\mathcal{A}\dfrac{\Delta T}{L}$ (in modulo, area $\mathcal{A}$)

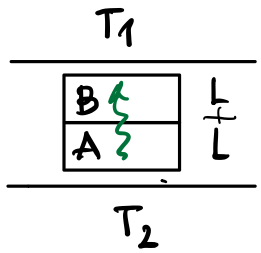
Lamine "equivalenti" in parallelo / serie:



Qui il ΔT è lo stesso per le due lamine e il flusso totale è la somma dei due flussi:

$$\dot{Q}_{TOT} = \dot{Q}_A + \dot{Q}_B = \mathcal{A}k_A\frac{\Delta T}{L} + \mathcal{A}k_B\frac{\Delta T}{L} = 2\mathcal{A}k_{TOT}\frac{\Delta T}{L}$$

$$\Rightarrow \quad k_{TOT} = \frac{k_A + k_B}{2} = k_{parallelo}$$



Qui il flusso è lo stesso per le due lamine (per la conservazione dell'energia) e i salti di temperatura sono differenti e tali che

$$\Delta T = \Delta T_A + \Delta T_B \;;\; \dot{Q}_A = \mathcal{A}k_A\frac{\Delta T_A}{L} \,,\; \dot{Q}_B = \mathcal{A}k_B\frac{\Delta T_B}{L}$$

$$\Rightarrow \quad k_{TOT} = 2\Big/\left(1/k_A + 1/k_B\right) = k_{serie}$$

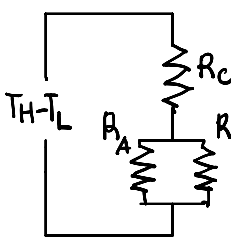
Questo equivale a scrivere

$$\dot{Q}_{parallelo} = 2\mathcal{A}k_{parallelo}\frac{\Delta T}{L} = \frac{\mathcal{A}\Delta T}{L}(k_A + k_B) = \frac{\Delta T}{R}$$

$$\dot{Q}_{serie} = \mathcal{A}\,k_{serie}\,\frac{\Delta T}{2L} = \frac{\mathcal{A}}{L}\Delta T\,\frac{k_A k_B}{k_A + k_B} = \frac{\Delta T}{R}$$

ovvero $R_{serie} = R_A + R_B$, $1/R_{parallelo} = 1/R_A + 1/R_B$

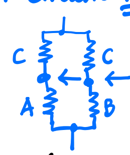
Nel caso in esame si può pensare a un circuito termico equivalente:



$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{TOT}} \,,\quad R_{TOT} = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} + R_C \,,\quad R_A = \frac{1}{k_A}\frac{L}{S/2} \,,\; R_B = \frac{1}{k_B}\frac{L}{S/2} \,,\; R_C = 1/k_C \; L/S$$

$$R_{TOT} = \frac{L}{S}\left(\frac{2}{k_A + k_B} + \frac{1}{k_C}\right) = 0.11\,\frac{K}{W} \;\Rightarrow\; \dot{Q} = 8.0 \times 10^2\,W$$

NB il circuito NON È EQUIVALENTE A



questi punti NON sono alla stessa temperatura!

(b) Per ottenere un flusso doppio solo modificando k_A è sufficiente richiedere che la resistenza termica dimezzata:

$$R'_{TOT} = \frac{R_{TOT}}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{k'_A + k_B} + \frac{1}{k_C} = \frac{1}{k_A + k_B} + \frac{1}{2k_C} \;\Rightarrow\; k'_A = 1.3\,\frac{W}{K\cdot m}$$

(c) La variazione di entropia si ottiene considerando i calori ceduti / assorbiti dai due termostati (usiamo $2\dot{Q}$ perché questa è la potenza raddoppiata):

$$\dot{\Delta S}\text{ (al secondo)} = 2\dot{Q}\left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_H}\right) = 1.2\;W/K \Rightarrow \Delta S(60\,s) = \dot{\Delta S} \times 60\,s = 72\,J/K$$