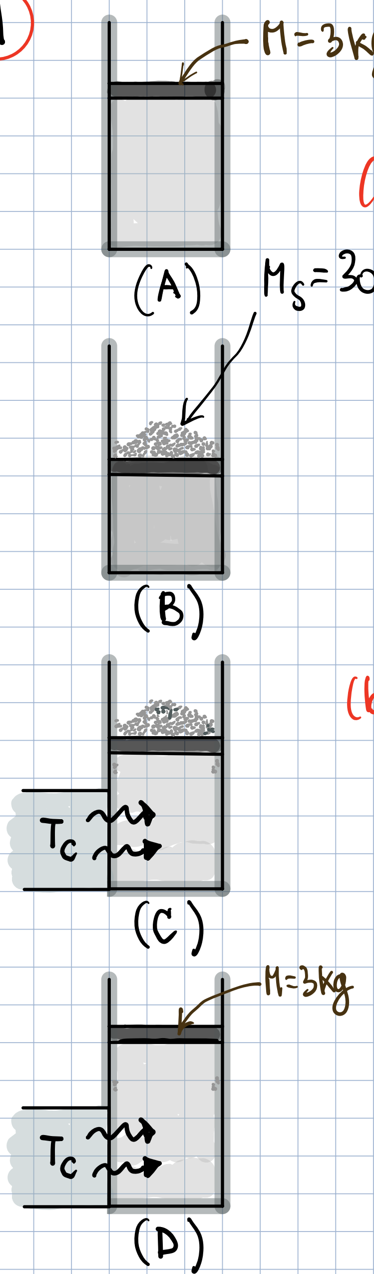
1



$$P_A = P_{atm} + \frac{Mg}{S} = 10^5\,Pa + \frac{3\,kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2}}{10^{-2}\,m^2} = 1.029 \times 10^5\,Pa$$

(a) $$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{1.029 \times 10^5\,Pa \times 10^{-2}\,m^3}{8.31\,J/mol \cdot K \times 300\,K} = 0.41 \text{ moli}$$

$$P_B = P_A + \frac{M_S g}{S} = 1.029 \times 10^5\,Pa + \frac{30\,kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2}}{10^{-2}\,m^2} = 1.323 \times 10^5\,Pa$$

E' una trasformazione adiabatica reversibile, $\gamma = 5/3$,

$$P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma} \rightarrow V_B = V_A \left(P_A/P_B\right)^{1/\gamma} = 8.6\,\ell$$

(b) $$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 334\,K$$

E' una trasformazione irreversibile con $P_{iniziale} = P_{finale}$,

$$V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = \frac{nRT_C}{P_B} = 10.3\,\ell$$

E' una trasformazione irreversibile con $T_{iniziale} = T_{finale}$, e con $P_{finale} = P_A$ perchè si torna al coperchio senza sabbia.

$$V_D = \frac{nRT_C}{P_A} = 13.2\,\ell$$

(c) $Q_{AB} = 0$, $W_{AB} = -\Delta U_{AB} = nc_V(T_A - T_B) = -174\,J$ (adiabatica reversibile)

$$\begin{cases} \Delta U_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = 337\,J, \quad W_{BC} = P_{ext}(V_C - V_B) = 225\,J \\ Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = 562\,J \quad [= nc_p(T_C - T_B)] \quad (\text{irreversibile}, P_C = P_B) \end{cases}$$

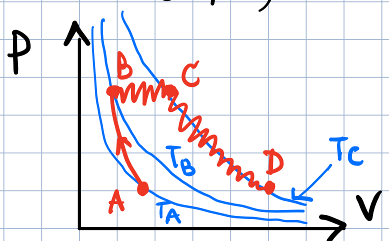
$\Delta U_{CD} = 0$, $W_{CD} = Q_{CD} = P_{ext}(V_D - V_C) = P_A(V_D - V_C) = 298\,J$ (irreversibile, $T_C = T_D$)

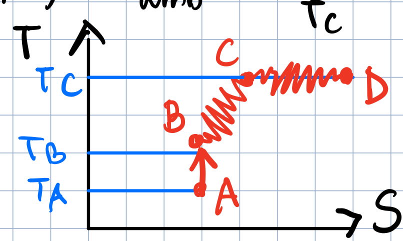
(d) AB: $\Delta S_{gas} = \Delta S_{amb} = \Delta S_{univ} = 0$

BC: $\Delta S_{gas} = nc_p \ln(T_C/T_B) = 1.54\,J/K$; $\Delta S_{amb} = \frac{-Q_{BC}}{T_C} = -1.41\,J/K$; $\Delta S_{univ} = 0.14\,J/K$

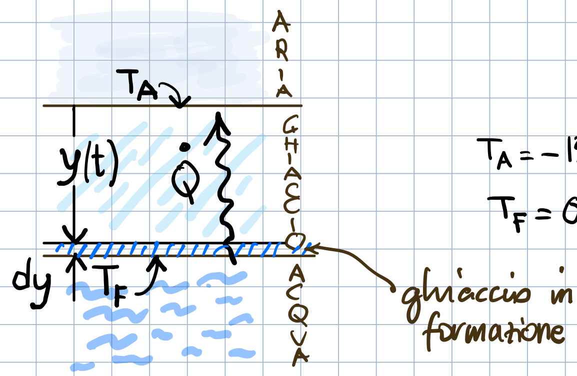
CD: $\Delta S_{gas} = nR \ln(V_D/V_C) = 0.85\,J/K$; $\Delta S_{amb} = -\frac{Q_{CD}}{T_C} = -0.75\,J/K$; $\Delta S_{univ} = 0.11\,J/K$

(e)





② Il calore per congelare lo spessore di acqua è



(a) $\delta Q_c = -\lambda\, dm = -\lambda \rho\, dV = -\lambda \rho A\, dy$

dove A è la superficie (arbitraria) interessata. Questo è calore latente negativo (sottratto all'acqua) e trasportato conduttivamente attraverso lo spessore di ghiaccio.

Per la legge di Fourier $\dot{Q} = -kA\dfrac{(T_A - T_F)}{y}$;

nell'infinitesimo di tempo dt il calore trasferito è

$$\delta Q = \dot{Q}\, dt = -\frac{kA(T_A-T_F)}{y}\, dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calore sottratto}}}{-\delta Q_c} = \lambda \rho A\, dy$$

$$y\, dy = \frac{k}{\lambda\rho}(T_F - T_A)\, dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} y\, dy = \frac{k}{\lambda\rho}(T_F - T_A)t \Rightarrow y(t) = \sqrt{y_0^2 + \frac{2k}{\lambda\rho}(T_F - T_A)t}.$$

o, anche, $\boxed{y(t) = y_0\sqrt{1+\beta t} \quad \text{con } \beta = \frac{2k}{\lambda \cdot \rho \cdot y_0^2}(T_F - T_A) = 9.6\times10^{-6}\ s^{-1}}$

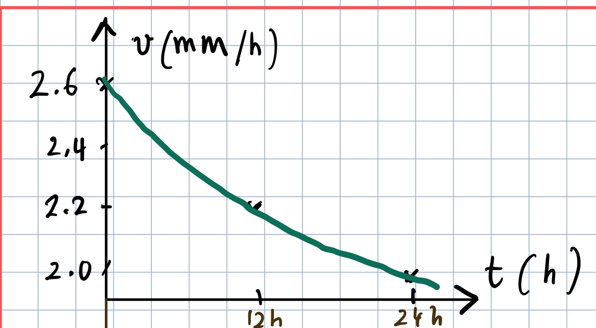
(b) $\Rightarrow$ $\boxed{y(6h) = 16.5\ cm, \Delta y = 1.5\ cm;\ y(12h) = 17.8\ cm, \Delta y = 2.8\ cm;\ y(24h) = 20.3\ cm, \Delta y = 5.3\ cm}$

(c) $\boxed{\Delta m\,(24h) = \text{Area} \times \Delta y\,(24h) \times \rho = 350\ m^2 \times 5.3\times10^{-2}\ m \times 917\ kg/m^3 = 1.7\times10^4\ kg}$

(d) Velocità di formazione

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(y_0\sqrt{1+\beta t}\right) =$$

$$= \frac{y_0 \beta}{2\sqrt{1+\beta t}} \simeq \frac{7.2\times10^{-7}}{\sqrt{1+9.6\times10^{-6}\, t}}\ \frac{m}{s}$$

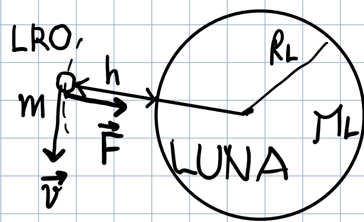


③ Per il calcolo della giltata del tiro serve il valore di g_L, accelerazione di gravità sulla superficie lunare:

$$\text{peso lunare} = M g_L = G\frac{M M_L}{R_L^2} \Rightarrow g_L = GM_L/R_L^2$$

Per calcolare GM_L si scrive l'equazione di moto radiale:

$$ma = \frac{m v^2}{R_L+h} = m\omega^2 (R_L+h) = G\frac{m M_L}{(R_L+h)^2}$$



$$\Rightarrow GM_L = \omega^2 (R_L+h)^3 = \frac{4\pi^2}{T^2}(R_L+h)^3$$

(a) $\Rightarrow g_L = \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{(R_L+h)^3}{R_L^2}$; $T = 113' = (113\times 60)\,s = 6.78\times 10^3\,s$

$R_L = 1740\ km$; $h = 50\ km$

$$\Rightarrow \boxed{g_L = \frac{4\pi^2}{(6.78\times 10^3 s)^2}\frac{(1.79\times 10^6 m)^3}{(1.74\times 10^6 m)^2} = 1.63\ m/s^2}$$

(b) Per il confronto delle gittate, date dall'espressione $D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$, siccome v_0 e θ sono gli stessi sulla Luna e sulla Terra, si ha

$$D_T = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g(T)}, \quad D_L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g(L)}$$

$$\Rightarrow D_T/D_L = g_L/g_T = \frac{1.63\ m/s^2}{9.8\ m/s^2} \simeq 1/6 \Rightarrow \boxed{D_L \sim 6 D_T = 723\ m}$$

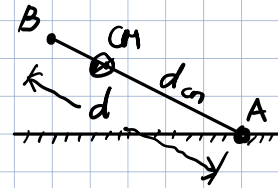
(c) Anche i tempi di volo della pallina sulla Terra e sulla Luna stanno nello stesso rapporto, perchè

$$t_{volo} = 2 v_0 \sin\theta / g \Rightarrow \boxed{\frac{t_{volo}^{LUNA}}{t_{volo}^{TERRA}} = \frac{g(T)}{g(L)} \simeq 6.}$$

(d) Calcolo di G conoscendo la densità media, $\delta_L = M_L/V_L$ e dalla già ottenuta relazione $M_L = g_L R_L^2/G \Rightarrow$

$$\delta_L = \frac{g_L R_L^2}{G}\cdot\frac{3}{4\pi R_L^3} = \frac{3}{4\pi R_L}\frac{g_L}{G} \Rightarrow \boxed{G = \frac{3}{4\pi\delta_L}\frac{g_L}{R_L} \cong 6.67\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}}$$

(4) Il problema si studia nel piano perpendicolare agli assi passanti per A e B



(a) Applicando due volte il teorema di Huygens-Steiner

$$I_B = M(d-d_{cm})^2 + I_{cm} \,, \quad I_A = M d_{cm}^2 + I_{cm} \,;$$

sottraendo: $\quad I_B - I_A = Md(d-2d_{cm}) \Rightarrow \boxed{d_{cm} = \frac{1}{2}\left[d + \frac{I_A - I_B}{Md}\right]}$

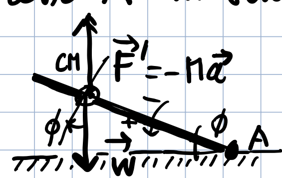
(b) Nel riferimento non-inerziale solidale al pianale si introduce la forza fittizia $\vec{F}' = -M\vec{a}$ applicata al CM per la quale

$$\boxed{\begin{cases} \vec{W} + \vec{T} + \vec{F}' = M\vec{a}'_{cm} \\ \vec{\tau}'_A = \vec{d}_{cm} \times (\vec{W} + \vec{F}') = I_A \vec{\alpha}'_{cm} \\ \vec{F}' = -M\vec{a} \quad \begin{bmatrix} \text{Riferimento} \\ \text{non inerziale} \end{bmatrix} \end{cases}}$$

Di queste equazioni utilizziamo solo la seconda cardinale associata alla rotazione ϕ

Se $a \leq g$ si ha equilibrio durante la caduta con $\phi = 0$, ovvero l'asta resta orizzontale (appoggiata al pavimento) perchè in modulo $W \geq Ma$. Se $a = g$ tutte le posizioni angolari sono di equilibrio indifferente.

Se $a > g$ l'asta subisce momento attorno all'asse A in senso orario che si annulla sulla verticale:



$$\tau_A = 0 \Leftrightarrow \phi = \pi/2 \quad \text{perchè}$$

$$\tau_A = I_A \ddot{\phi} = -d_{cm} M(a-g)\cos\phi = d_{cm} M (g-a)\cos\phi$$

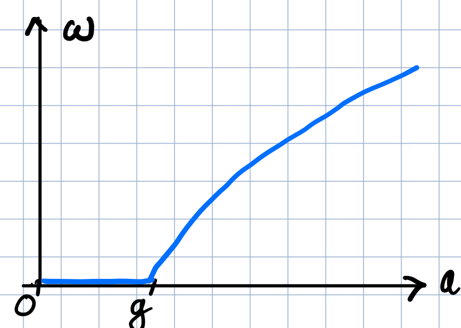
(c) Le forze che lavorano sono conservative per cui si può calcolare

$$E_i\,(\phi=0, \omega=0) = 0 \,; \qquad E = \frac{1}{2} I_A \omega^2 + M(g-a)\, d_{cm} \sin\phi$$

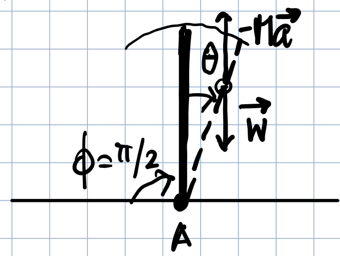
$$\Rightarrow \omega(\phi) = \sqrt{\frac{2M(a-g)}{I_A} d_{cm} \sin\phi}$$

per cui $\quad \omega_{MAX} = \omega\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2M(a-g)d_{cm}}{I_A}}$

o anche $\quad \boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{(a-g)}{I_A}\left(\frac{Md^2 + I_A - I_B}{d}\right)}}$



(d) Le oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio ($\phi=\pi/2$) si descrivono approssimando per piccoli angoli l'equazione del moto (cioè la II equazione cardinale, usando $\theta=\phi-\pi/2$):

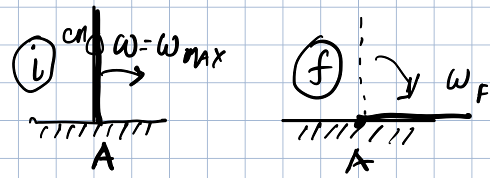


$$\tau_A = d_{cm} M (g-a)\sin\theta \simeq d_{cm} M (g-a)\theta =$$

$$= I_A \ddot{\theta} \iff \ddot{\theta} \simeq -\frac{d_{cm} M (a-g)}{I_A}\theta \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{d_{cm} M (a-g)}}}$$

(e) Se viene meno l'accelerazione del pianale allora si annulla anche la forza fittizia nel suo riferimento che torna a essere inerziale. L'asta è ancora un pendolo rovescio che parte dalla verticale ($\phi=\pi/2$) con velocità angolare ottenuta nel punto (d). L'asticella procede accelerata solo dal suo peso per cui, con la conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2} I_A \omega_{MAX}^2 = \frac{1}{2} I_A \omega_F^2 - Mg d_{cm}$$



$$\Rightarrow \boxed{\omega_F = \sqrt{\omega_{MAX}^2 + \frac{2Mg\,d_{cm}}{I_A}}}.$$

(f) Valori numerici

$$\boxed{\begin{aligned}
&(a)\quad d_{cm} = \frac{1}{2}\left[d + \frac{I_A - I_B}{Md}\right] = \frac{1}{2}\left[0.2\,m + \frac{(0.01-0.001)\,kg\cdot m^2}{0.5\,kg \times 0.2\,m}\right] = 0.145\,m \\
&(d)\quad \omega_{MAX} = \sqrt{\frac{2M(a-g)d_{cm}}{I_A}} = \sqrt{\frac{2\times 0.5\,kg \times (2.2)\,m/s^2 \times 0.145\,m}{0.01\,kg\cdot m^2}} = 5.65\,\frac{rad}{s} \\
&(e)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{d_{cm} M (a-g)}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.01\,kg\,m^2}{0.145\,m \times 0.5\,kg \times 2.2\,\frac{m}{s^2}}} = 1.57\,s \\
&(f)\quad \omega_F = \sqrt{\omega_{MAX}^2 + \frac{2Mg\,d_{cm}}{I_A}} = \sqrt{\left(5.65\,\frac{rad}{s}\right)^2 + \frac{2\times 0.5\,kg \times 9.8\,m/s^2 \times 0.145\,m}{0.01\,kg\,m^2}} = 1.32\,\frac{rad}{s}
\end{aligned}}$$