1.

(a) Dall'equazione di stato $P_0V_0 = nRT_0$, essendo P_0 la somma delle pressioni parziali dei due gas, indicati con (a) e (b).

$$P_0 = p_0^{(a)} + p_0^{(b)} = f\frac{nRT_0}{V_0} + (1-f)\frac{nRT_0}{V_0}\,,$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_0^{(a)} &= fnRT_0/V_0 \\ p_0^{(b)} &= (1-f)\,nRT_0/V_0 \end{aligned}}$$

(b) Si può scrivere per l'energia interna della miscela di gas che

$$dU = dU^{(a)} + dU^{(b)} = fnc_V^{(a)}dT + (1-f)nc_V^{(b)}dT = nc_V^* \, dT$$

dove $c_V^* = fc_V^{(a)} + (1-f)c_V^{(b)} = (5-2f)R/2$, per cui la miscela può essere vista come un gas ideale con calore specifico efficace c_V^*. Quindi si può anche introdurre il rapporto

$$\gamma^* = c_P^*/c_V^* = 1 + R/c_V^* = \frac{7-2f}{5-2f}\,.$$

Nella compressione adiabatica quasi-statica allora vale la

$$\boxed{p = \text{costante}\cdot V^{-\gamma^*} = \text{costante}\; V^{\frac{2f-7}{5-2f}}}$$

(c) La variazione totale di entropia è nulla ma i due gas separatamente variano la propria entropia bilanciandola tra di essi perché hanno differenti calori specifici:

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S^{(a)} + \Delta S^{(b)} = 0$$

con $\Delta S^{(a)} = fn\left[c_V^{(a)} \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V}{V_0}\right]$, $\Delta S^{(b)} = (1-f)n\left[c_V^{(b)} \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V}{V_0}\right]$

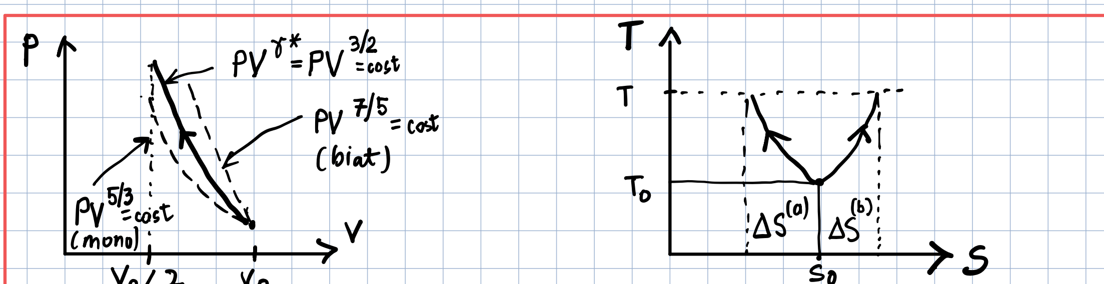
con $TV^{\gamma^*-1} = \text{cost} \iff \ln\frac{T}{T_0} = (1-\gamma^*)\ln\frac{V}{V_0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta S^{(a)} = f\,nR\left[\frac{3}{2}(1-\gamma^*)+1\right]\ln\frac{V}{V_0} = 2\frac{f(1-f)}{5-2f}\,nR\ln\frac{V}{V_0} \\ \Delta S^{(b)} = (1-f)\,nR\left[\frac{5}{2}(1-\gamma^*)+1\right]\ln\frac{V}{V_0} = -2\frac{f(1-f)}{5-2f}\,R\ln\frac{V}{V_0} \end{cases}$$

e, infatti, $\Delta S^{(a)} = -\Delta S^{(b)}$

Se $\begin{cases} V = V_0/2 \text{ e } f = 1/2 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\Delta S^{(a)} = -\Delta S^{(b)} = \frac{R}{2}\ln\frac{1}{2} = -2.88\ J/K}$

(d) $\gamma^*(\text{per } f=1/2) = 3/2$



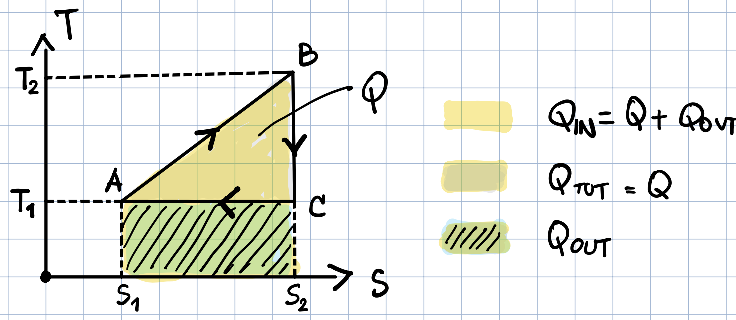
NB: si ottiene che $\Delta S^{(a,b)} = \pm\, nRf(1-f)\ln\frac{T}{T_0}$

2.

(a) Nel ciclo $0 = \Delta U = Q - W$

e, nel diagramma T-S,

$$\text{area} = Q = W = \frac{(T_2 - T_1)(S_2 - S_1)}{2}.$$



Il rendimento è

$$\eta = \frac{W}{Q_{IN}} \qquad \text{dove} \quad Q_{IN} = \left(\begin{matrix}\text{area del} \\ \text{trapezio}\end{matrix} \right) = \frac{(T_1 + T_2)(S_2 - S_1)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2}}$$

(b) $\eta_C = 1 - T_1/T_2 = \dfrac{T_2 - T_1}{T_2} > \dfrac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2} = \eta$, cioè $\boxed{\eta < \eta_C \text{ in accordo con il teorema di Carnot}}$

(c) Il ciclo con massimo rendimento è quello di Carnot, per cui

$$\boxed{\frac{\eta}{\eta_C} = \frac{T_2}{T_1 + T_2} = \frac{T_2/T_1}{1 + T_2/T_1} = 2/3 \quad \text{se} \quad T_2 = 2T_1}$$

(d) $$\Delta S_{AB} = -\Delta S_{AC} = -\frac{Q_{OUT}}{T_1} = -\frac{(-1000\,J)}{273\,K} = 3.7\ J/K$$

3.

(a) le tre molle si dividono equamente il carico all'equilibrio che è pari a Mg:

$$\boxed{3k(x_{eq}-l_0) = Mg \;\Rightarrow\; x_{eq} = l_0 + \frac{Mg}{3k} = 0.4\,m + \frac{0.2\,kg \times 9.8\,m/s^2}{3\times 20\,N/m} = 0.43\,m}$$

(b) L'urto è completamente anelastico: si conserva solo la quantità di moto:

$$\boxed{mv_0 = (m+M)v' \Rightarrow v' = \frac{m}{m+M}v_0,\quad v_0 = \sqrt{2g\,x_{eq}} = \sqrt{2\times 9.8\times 0.43}\,\frac{m}{s} = 2.9\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow v' = 0.58\,m/s}$$

(c) Il moto del sistema disco + pallina è armonico semplice generato dall'equazione del moto

$$(M+m)\ddot{x} = (M+m)g - 3k(x-l_0)$$

che ha posizione di equilibrio $x'_{eq} = \frac{(M+m)g}{3k} + l_0 = x_{eq} + mg/3k = 0.44\,m$

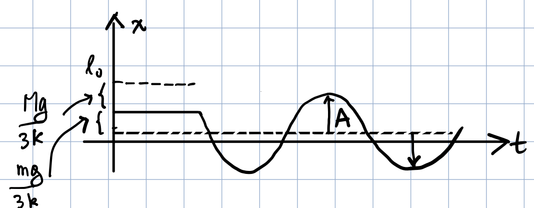
e pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m+M}} = 15.5\,rad/s$

La soluzione generale è $\boxed{x(t) = x'_{eq} + A\sin(\omega t+\phi)}$ e condizioni

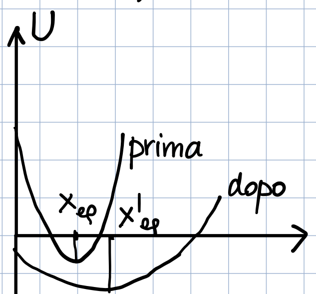
$$x(0) = x_{eq} = x'_{eq} + A\sin\phi = x_{eq} + \frac{mg}{3k} + A\sin\phi \Rightarrow A\sin\phi = -\frac{mg}{3k}$$

$$\dot{x}(0) = \omega A\cos\phi = v' \Leftrightarrow A\cos\phi = v'/\omega = \frac{m}{m+M}v_0\cdot\sqrt{\frac{m+M}{3k}} = \frac{mv_0}{\sqrt{3k(m+M)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \tan\phi = -\frac{mg}{3k}\cdot\frac{\omega}{v'} = -\frac{\cancel{m}g}{3k}\cdot\sqrt{\frac{3k}{m+M}}\cdot\frac{m+M}{\cancel{m}}\frac{1}{\sqrt{2g\,x_{eq}}} = -\sqrt{\frac{(m+M)g}{6k\,x_{eq}}} = -0.22 \\ A = \sqrt{\left(\frac{mg}{3k}\right)^2 + \left(\frac{v'}{\omega}\right)^2} = 0.038\,m \end{cases}}$$



(d)



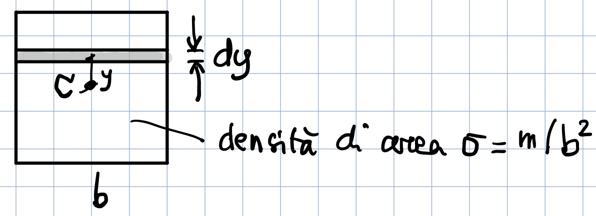
(e) $\Delta E = E_{K_f} - E_{K_i} = \frac{1}{2}(m+M)v'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 =$

$$= \frac{1}{2}(m+M)\cdot\frac{m^2}{(m+M)^2}v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0^2 = -0.168\,J}$$

che è anche la variazione di energia cinetica relativa al CM del sistema disco + pallina $\left[-\frac{1}{2}\mu_{mM}v_0^2\right]$

4.

(a) Calcolo del momento di inerzia:

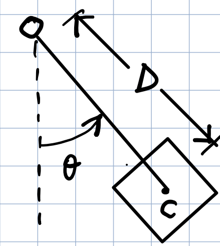


il momento della striscia infinitesima rispetto C è

$$dI_c = dm\left(\frac{b^2}{12}+y^2\right), \quad dm = \sigma \cdot b \cdot dy$$

$$\Rightarrow I_c = \int_{-b/2}^{+b/2} dI_c = \sigma b \int_{-b/2}^{+b/2}\left(\frac{b^2}{12}+y^2\right)dy = \sigma b\left[\frac{b^3}{12}+\frac{b^3}{12}\right] = \frac{\sigma b^4}{6} = \frac{mb^2}{6}$$

(b) Si utilizza la conservazione dell'energia meccanica: solo la forza peso dà contributo potenziale. Sia nel caso A che nel B l'energia potenziale è data, a meno di una costante additiva, da



$$U = U(\theta) = -\left(\frac{MD}{2}+mD\right)g\cos\theta + \text{cost}$$

per cui

$$\Delta U = U(\vartheta)-U(\vartheta_0) = \left(\frac{M}{2}+m\right)gD\,(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta);$$

i momenti di inerzia attorno a O sono invece differenti nei due casi:

(A) Sia la sbarretta che il quadrato ruotano:

$$I_O^{(A)} = \frac{MD^2}{3} + m\left(\frac{b^2}{6}+D^2\right) = \left(\frac{M}{3}+m\right)D^2 + \frac{mb^2}{6}$$

(B) solo la sbarretta ruota (e il quadrato trasla):

$$I_O^{(B)} = \frac{MD^2}{3} + mD^2 = \left(\frac{M}{3}+m\right)D^2$$

Quindi, dalla $\Delta U = -\Delta E_K$,

(A) $\left(\frac{M}{2}+m\right)gD\,(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta) + \frac{1}{2}I_O^{(A)}\omega_A^2 = 0 \iff \omega_A^2 = 2g\,(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)\dfrac{(M/2+m)D}{(M/3+m)D^2+mb^2/6}$

(B) $\left(\frac{M}{2}+m\right)gD\,(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta) + \frac{1}{2}I_O^{(B)}\omega_B^2 = 0 \iff \omega_B^2 = 2g\,(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)\dfrac{(M/2+m)}{(M/3+m)D}$

e il rapporto tra le velocità è

$$\boxed{\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \sqrt{\frac{(M/3+m)D^2}{(M/3+m)D^2+mb^2/6}}}$$

per qualunque posizione (se ϑ_0 è la stessa).

(c) Siccome $W = -\Delta U$, il lavoro è lo stesso in A e in B e vale

$$\boxed{W(\theta_0=\pi/3 \to \theta=0) = \left(\frac{M}{2}+m\right)gD\left(1-\frac{1}{2}\right) = 17.6\text{ kJ}}$$