Casi di studio con particolari leggi orarie.

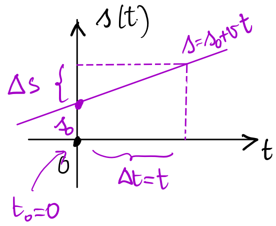
- **Velocità (media o istant) costante nel tempo:**

$$v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \left(\text{oppure } \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

Si scrive $\Delta t = t - t_0$, $t_0 = 0$ e $\Delta s = s - s_0$ (o $\Delta x = x - x_0$) per cui

$$\Rightarrow \quad v = \frac{x - x_0}{t} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + vt \quad (\text{o } s = s_0 + vt)$$

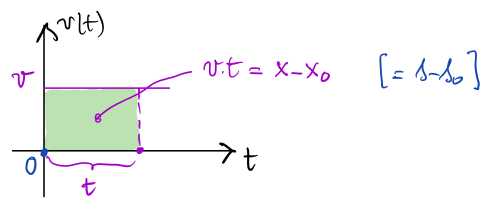
Questo è un moto uniforme (rettilineo o curvilineo), nel senso che la strada viene percorsa a ritmo (velocità) costante nel tempo.



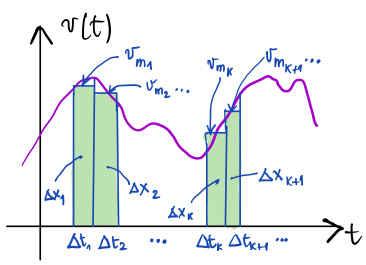
NB lo stesso tipo di grafico orario si ottiene studiando la coordinata cartesiana x lungo un singolo asse (moto rettilineo).

- **Grafico orario della velocità**

L'area in verde è lo spazio percorso $(x - x_0)$ nel tempo t (cioè lo spostamento del punto).



Questo dell'area del grafico orario della velocità è un risultato valido in generale, anche se la velocità non è costante.



Il percorso totale $(\Delta x = x - x_0$ o $\Delta s = s - s_0)$ è stato "affettato" in tanti rettangolini di base Δt_k $(k = 1, \ldots, N)$ sufficientemente piccola da poter considerare in questo intervallo che la velocità sia costante e pari alla velocità media:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = v_{m_k} \Delta t_k \quad e \quad \Delta x = \sum_{1}^{N} {}_k \, \Delta x_k = \sum_{1}^{N} {}_k \, v_{m_k} \Delta t_k$$

Si opera con un limite di infiniti rettangoli: $\Delta x = \lim_{N \to \infty} \sum_{1}^{N} {}_k \, v_{m_k} \Delta t_k = \int_0^t v(t')\, dt'$

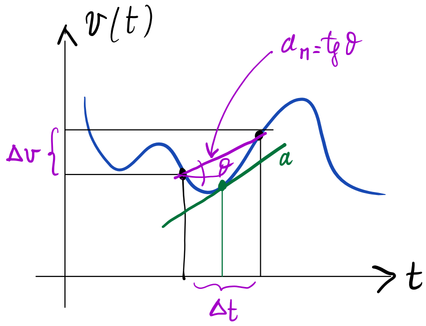
Notare che se v = costante $\Delta x = \int_0^t v\, dt = v \Delta t$ e, in generale,

$$\boxed{x = x_0 + \int_0^t v \, dt'} \quad \left[\text{oppure } s = s_0 + \int_0^t v(t')\, dt'\right] \text{ che è consistente con la } v = \frac{dx}{dt}.$$

Si parla di ACCELERAZIONE (in 1-DIM)

MEDIA, $a_M = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

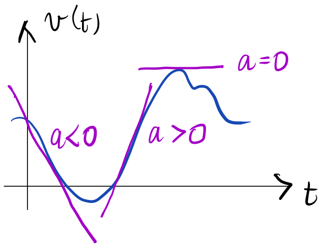
ISTANTANEA, $a = \lim_{\Delta t \to 0} a_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$

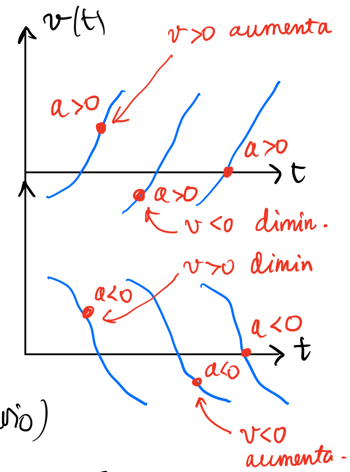


a_M è la pendenza ($tg\theta$) del segmento che congiunge le due posizioni del punto.
a è la pendenza della retta tangente nell'istante considerato

NB Si può scrivere che $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$ (derivata seconda di s).

- → Lettura dei grafici orari

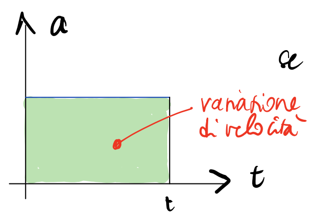




NB Non esistono in fisica « decelerazioni » ma, in caso, accelerazioni negative.

- → Caso di accelerazione costante ($a = cost$):
moto (rettilineo) uniformemente accelerato (o vario)

[similitudine con la procedura già vista per il caso $v = cost$]



se $a = cost = a_M = \frac{v - v_0}{t}$ (preso $t_0 = 0$ e $v(t = t_0) = v_0$)

$\Rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$

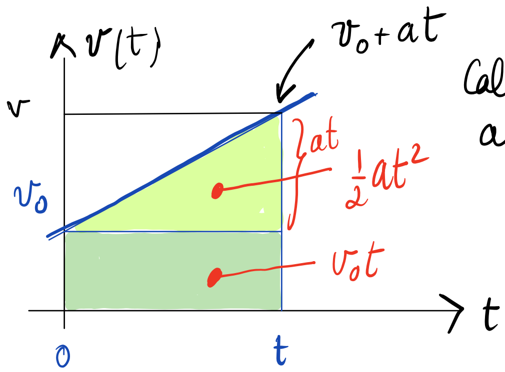
$\boxed{\text{NB } \frac{dv}{dt} = a}$

La velocità (la sua variazione dal valore iniziale v_0) è l'AREA del grafico $a(t)$ (del rettangolo di base t e altezza a: $v - v_0 = at$).

- → Legge oraria $s(t)$ per il moto uniformemente vario:

$$\boxed{s = s_0 + \int_0^t v\, dt' = s_0 + \int_0^t [v_0 + at']\, dt' = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

lo stesso risultato lo si ottiene anche per via grafica:



Calcolo di $\Delta s = s - s_0$ come area sottesa dal grafico di $v(t)$:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

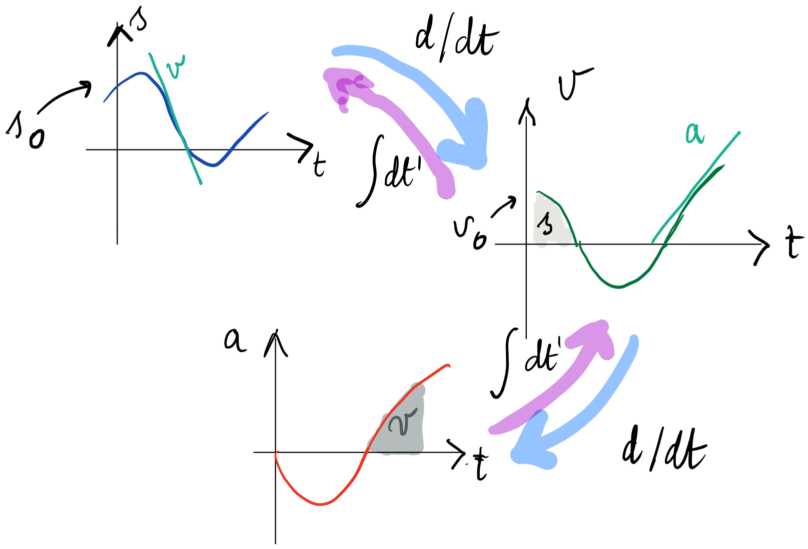
• → Si può considerare il caso generale con $a \neq \text{cost}$ (moto generalmente vario)

Vale ancora che $a = \frac{dv}{dt}$ → $\boxed{v = v_0 + \int_0^t a\, dt'}$

Data a si ottiene v (per integrazione, specificando v_0)

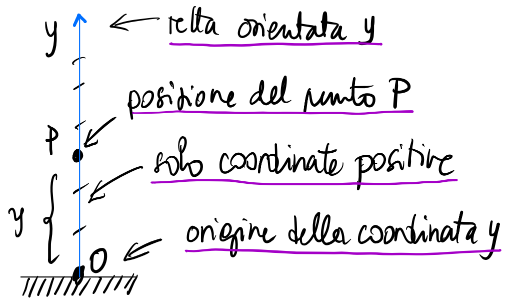
Data v si ottiene s (per integrazione, specificando s_0).

• → Collegamento generale fra i grafici delle leggi orarie [d/dt: derivazione, $\int dt'$: integrazione]



Due esempi di cinematica 1DIM

(A) Punto materiale accelerato uniformemente dalla gravità: valore dell'accelerazione $a = 9.8\ m/s^2$, la indichiamo con g.



Si sa che a è data, costante, e sempre negativa, ovvero $\Delta v < 0$ in ogni istante del moto.

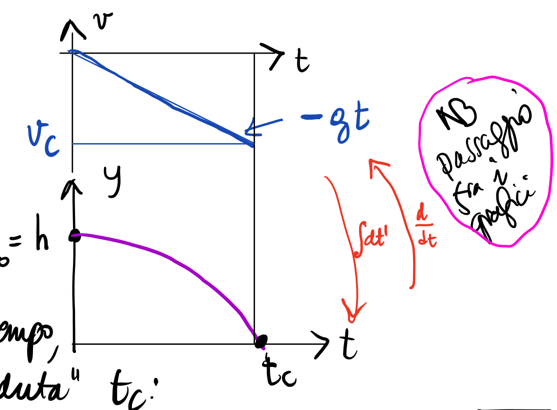
Si scrivono le leggi orarie:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -g \quad (\text{è negativa!}) \\ v &= v_0 + at = v_0 - gt \quad (\text{dunque } \Delta v = -gt < 0) \\ y &= y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

Si specificano v_0 e y_0 in funzione del particolare caso in esame.

Per esempio: si lascia cadere il punto dalla quota $y_0 = h$ da fermo $(v_0 = 0)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v &= -gt \\ y &= h - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$



La velocità aumenta (in valore assoluto); la quota diminuisce quadraticamente nel tempo, $y=0$ (arriva al suolo) nel tempo di "caduta" t_c:

$$h - \tfrac{1}{2} g t_c^2 = 0 \iff t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{con velocità} \quad v(t=t_c) = v_c = -g t_c = -\sqrt{2gh}$$

NB CONTROLLARE LE DIMENSIONI SEMPRE!

(C) Doppio lancio [verticale] di due punti con eguali velocità iniziali e soggetti alla stessa accelerazione (g) ma intervallati di un tempo t_D. . .

Interessa l'istante, quota e velocità di incontro, se esiste.

legge oraria dell'oggetto I
$$y_I = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_I = v_0 - g t$$

legge oraria dell'oggetto II
$$y_{II} = v_0 (t - t_D) - \frac{1}{2} g (t - t_D)^2$$
$$v_{II} = v_0 - g (t - t_D)$$

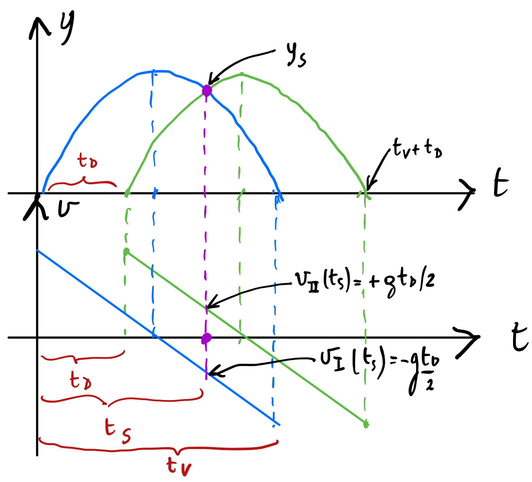
NB: spostamento dell'origine dei tempi.

Soluzione formale e analitica: il tempo di incontro si ricava imponendo che le quote siano eguali in $t = t_S$:
$$y_I(t_S) = v_0 t_S - \frac{1}{2} g t_S^2 = y_{II}(t_S) = v_0 (t_S - t_D) - \frac{1}{2} g (t_S - t_D)^2$$

Eseguendo i passaggi si ottiene $t_S = t_D/2 + v_0/g$.
Sostituendo per le quote e velocità si ricavano i valori
$$y_S = y_I(t_S) = y_{II}(t_S) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{8} g t_D^2,$$
$$v_I(t_S) = -\frac{g t_D}{2}, \quad v_{II}(t_S) = +\frac{g t_D}{2}$$

NB: c'è incontro se
$y_S > 0 \Leftrightarrow t_D < 2v_0/g = t_V$
con $2v_0/g$ = tempo di volo, t_V

Soluzione per via grafica



dal disegno
$$t_S = \frac{t_V + t_D}{2} = \frac{v_0}{g} + \frac{t_D}{2}$$