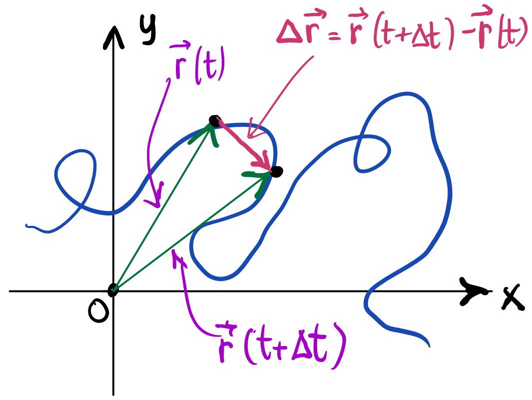
Cinematica del punto materiale in 2 dimensioni

Necessità di ESTENDERE le idee della cinematica 1D a casi in 2D e 3D.

Si recuperano tutte le definizioni di velocità e accelerazione e, tramite l'algebra dei vettori, si riscrivono e si applicano ai moti sul piano (e fuori piano).

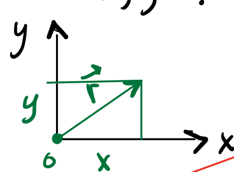
Caso di moti nel piano



NB la curva è una TRAIETTORIA, non una legge oraria (sugli assi non compare il tempo!)

Descrizione del moto tramite il vettore posizione $\vec{r}(t)$, che è riconducibile alla coppia di componenti cartesiane x, y:

$$\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t))$$



In un intervallo di tempo Δt il punto si sposta fino a raggiungere la nuova posizione nel tempo $t + \Delta t$ data da

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$$

NB si può usare anche la notazione $\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y$

dove si è introdotto il $\boxed{\text{vettore spostamento } \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}$.

con componenti secondo gli assi coordinati cartesiani date da

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y) = \left(x(t+\Delta t) - x(t),\ y(t+\Delta t) - y(t)\right)$$

- La velocità media (vettoriale) è data dal vettore

$$\vec{v}_M = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

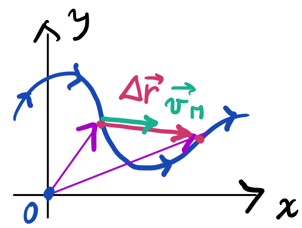
[che si scompone lungo x e y come $\vec{v}_M = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$]

$\vec{v}_M = (v_{Mx}, v_{My})$

$v_{Mx} = \Delta x / \Delta t$

$v_{My} = \Delta y / \Delta t$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_M$ è parallela a $\Delta \vec{r}$



vuol dire: la velocità media porta il punto lungo lo spostamento ...

- Si costruisce la velocità (vettoriale) istantanea

utilizzando il limite "a infinita risoluzione temporale" già usato nel caso rettilineo,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

ovvero $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$ ← ma che vettore è?

[cioè: quanto vale e come è diretto?]

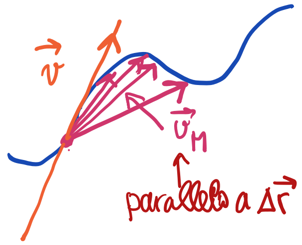
- Caratteristiche del vettore $\vec{v}$

Ha componenti cartesiane $\vec{v} = (v_x, v_y) = \hat{i}\, v_x + \hat{j}\, v_y = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$

LE COMPONENTI SONO LE VELOCITÀ LUNGO X e Y

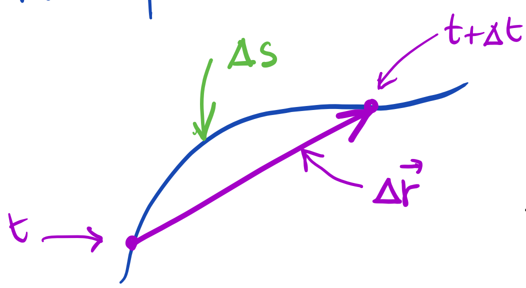
Quindi ha intensità (modulo) data da

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$



Intuitivamente $\vec{v}$ deve risultare $\boxed{\text{tangente}}$ alla traiettoria del punto in qualunque sua posizione.

Più esplicitamente

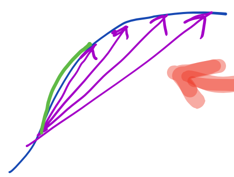


Δs è la strada (coordinata curvilinea) percorsa con segno

$\Delta\vec{r}$ è il vettore spostamento

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\,\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

quando $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{r}$ in modulo tende a Δs e ha direzione tangente. Dunque $\Delta\vec{r}/\Delta s$ tende al VERSORE TANGENTE:



$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \hat{u}_T$$

questo rapporto quando $\Delta t \to 0$ esprime la velocità stradale o curvilinea

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \longrightarrow v = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |\dot{s}|$$

Si indica qui con $v_s = \dot{s}$ la velocità scalare «intrinseca» [ha segno a seconda del verso di percorrenza, v invece è sempre positiva]

NB NON CONFONDERE il VETTORE $\vec{v}$ con $v = |ds/dt| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

Quindi

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \hat{u}_T\, v_s}$$

direzione SEMPRE tangente

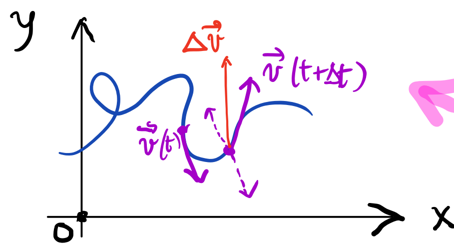
velocità intrinseca ("stradale", $v = |v_s|$)

L'accelerazione è definita in perfetta analogia e corrispondenza con il caso 1D e rappresenta quindi la variazione (media o istantanea) nel tempo del vettore velocità :

$$\vec{a}_M = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad , \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Novità : ora questa variazione si riferisce contemporaneamente al modulo e alla direzione della velocità.



Il vettore $\Delta\vec{v}$ è non nullo anche se v non varia in modulo ma solo in direzione

In pratica ci si aspetta di dover tener conto di due accelerazioni : una che misura la variazione di v (modulo), l'altra che misura la direzione di $\vec{v}$ (vettore).

Più esplicitamente si parte dalla $\vec{v} = v_s \hat{u}_T$ ← direzione (tangente)

↑ velocità intrinseca

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \hat{u}_T) = \frac{dv_s}{dt}\hat{u}_T + v_s \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

variazione della velocità stradale (acceleratore)

variazione della direzione di $\vec{v}$ (sterzo)

questa è un'accelerazione tangenziale (diretta secondo $\hat{u}_T$) di modulo $\frac{dv_s}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$:

NON È $\frac{d\vec{v}}{dt}$; $\boxed{\vec{a}_T = \frac{dv_s}{dt}\hat{u}_T}$

questa accelerazione è una novità e va determinata. L'accelerazione totale $\vec{a}$ è composta sia da $\vec{a}_T$ che da quella di sterzo!