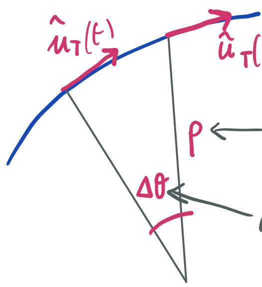
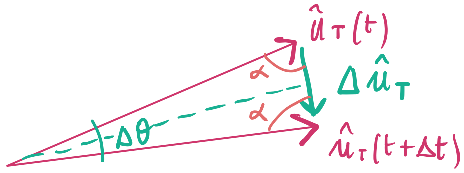
→ Determinazione dell'accelerazione "di sterzo",

$$\vec{a}_{STERZO} = v_s \frac{d\,\hat{u}_T}{dt}$$ ← bisogna calcolare la variazione nel tempo del versore tangente alla traiettoria.



ρ ← raggio del cerchio "istantaneo" o "locale" alla traiettoria.

$\Delta\theta$ ← angolo percorso nel tempo Δt



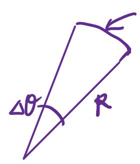
Osservare bene il triangolo isoscele con lati $\hat{u}_T$ (di modulo 1, è un versore) e angoli alla base α.

Vale $\Delta\theta + 2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}$.

Quando $\Delta\theta \to 0$ (perché ci serve che $\Delta t \to 0$) è $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, per cui $\Delta\hat{u}_T$ è perpendicolare a $\hat{u}_T$ se $\Delta t \to 0$;

poi vale che, in modulo, $\Delta u_T = 2|\hat{u}_T| \operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2}$.

$\Rightarrow \frac{\Delta u_T}{\Delta t} = \frac{2}{\Delta t}\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2}$. Inoltre



$v_s\Delta t = \rho\Delta\theta$

$\Delta t = \frac{\rho\Delta\theta}{v_s}$

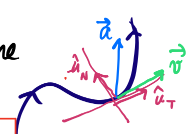
$$\Rightarrow \frac{\Delta u_T}{\Delta t} = \frac{2v_s}{\rho\Delta\theta}\operatorname{sen}\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{v_s}{\rho}\frac{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} \xrightarrow[\Delta\theta\to 0]{} \frac{v_s}{\rho}$$ perché $\frac{\operatorname{sen}x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

dunque $\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \hat{u}_N \cdot \frac{v_s}{\rho} \Rightarrow \vec{a}_{STERZO} = v_s\frac{d\hat{u}_T}{dt} = v_s \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$

$v_s^2 = v^2$ (non serve più "s")

$\hat{u}_N$ ← direzione perpendicolare a $\hat{u}_T$, "NORMALE"

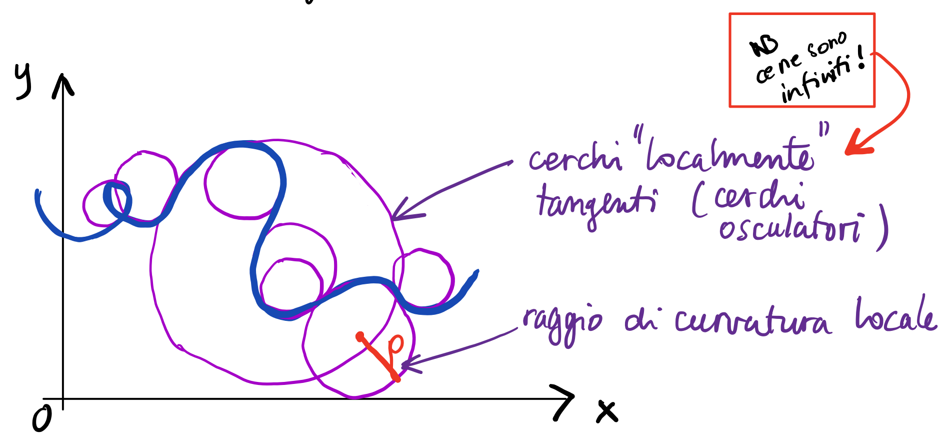
→ Scomposizione generale vettoriale dell'accelerazione intrinseca

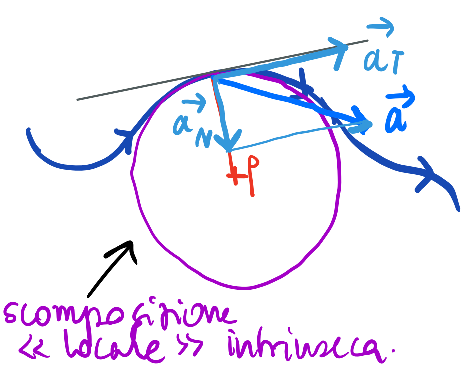


$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv_s}{dt}\hat{u}_T + \frac{v_s^2}{\rho}\hat{u}_N = \ddot{s}\,\hat{u}_T + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_N}$$

Vale per qualunque traiettoria curva (non solo circolare)

Traiettoria curvilinea generale, significato del raggio ρ





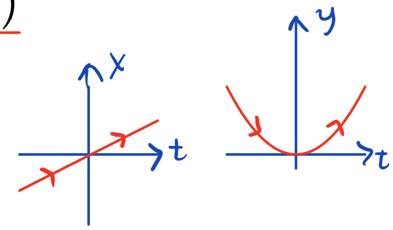
Si approssima la curva con un cerchio tangente di raggio ρ opportuno e si calcolano le componenti tangente e normale ("centripeta") dell'accelerazione

$$a_T = \frac{dv_s}{dt} \quad , \quad a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

In punti diversi in generale cambia il raggio del cerchio tangente.
Si usa anche la "curvatura" k intesa come il reciproco del raggio osculatore, $K = 1/\rho$, dove

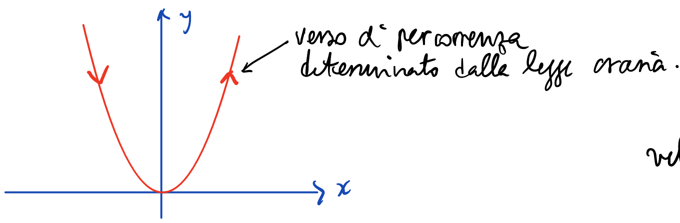
$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \text{oppure} \quad K = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

Esempio ("adimensionale" per convenienza)



leggi orarie $\quad x(t) = t/2 \rightarrow \dot{x}(t) = 1/2$
$\quad\quad\quad\quad\quad y(t) = t^2/4 \rightarrow \dot{y}(t) = t/2$

traiettoria $\quad t = 2x \rightarrow y = x^2$

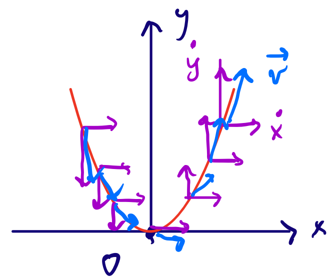


velocità $\quad v = |\vec{v}| = |v_s| = |\dot{s}|$

$$= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}$$

$\vec{v}$ è il vettore tangente alla traiettoria secondo il versore

$$\hat{u}_T = \frac{\vec{v}}{v} = \left(\frac{\dot{x}}{v}, \frac{\dot{y}}{v}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

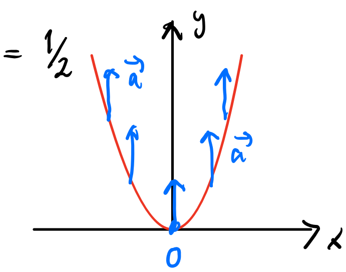


NB $\quad \vec{v}$ ha intensità e direzione VARIABILI (lungo la traiettoria e nel tempo).

Ci si aspetta quindi un'accelerazione che spieghi questi fatti.

$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a = |\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1/2$

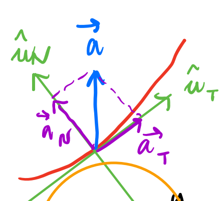
$a_y = \ddot{y} = 1/2$



Scomposizione intrinseca $\quad \vec{a} = \ddot{s}\,\hat{u}_T + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{u}_N$

$$a_T = \ddot{s} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sqrt{t^2+1} = \frac{t}{2\sqrt{t^2+1}};$$

$$a_N = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{t^2}{4(t^2+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}};$$



$a_T \gtrless 0$ per $t \gtrless 0$ [accelerazione «curvilinea»].

Calcolo con il raggio di curvatura, $\rho = 1/K$ dove

$$K = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+t^2)^{3/2}} \quad \text{e, infatti,} \quad a_N = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}$$