Due fondamentali casi di studio di cinematica piana.

Un esempio con accelerazione $\vec{a}$ assegnata;
un esempio con traiettoria assegnata.

(A) Studio del moto del punto con $\vec{a}$ = costante. Per non essere troppo misteriosi fin dall'inizio,

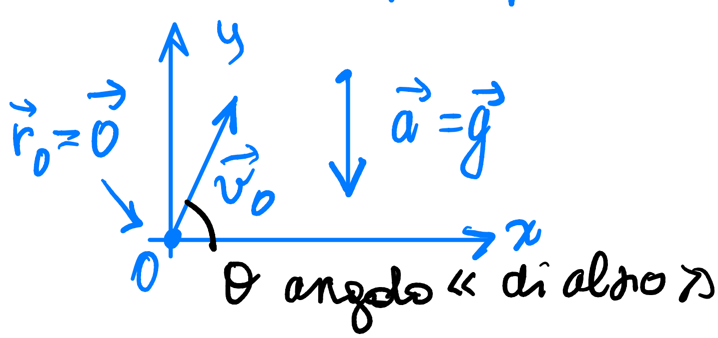
$$\vec{a} = \vec{g} = \text{cost}, \quad |\vec{g}| = g = 9.8\ m/s^2.$$

Conosciamo già le leggi orarie vettoriali per integrazione,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

dove assumiamo che le condizioni iniziali $\vec{v}_0, \vec{r}_0$ siano date e note.

Usiamo riferimento cartesiano per proiettare le leggi con $\hat{j} \parallel \vec{g}$:



$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases}$$

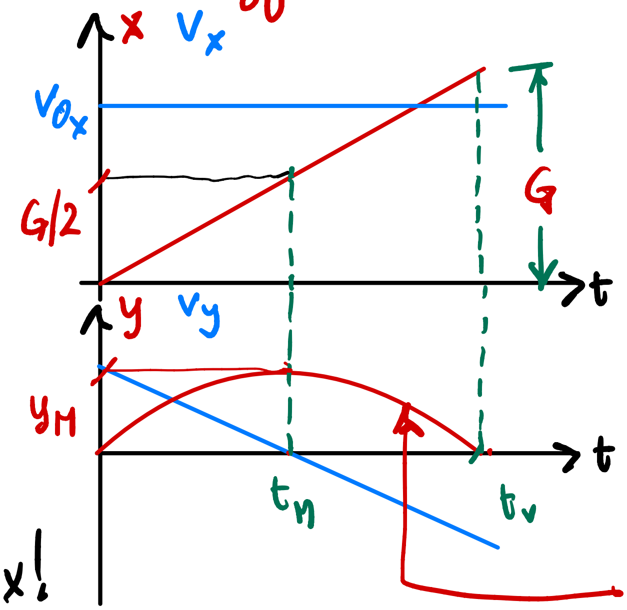
⇒ proiezioni:
$\vec{a} \equiv (0, a_y) = (0, -g)$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} - gt \end{cases};$$

$\frac{d}{dt}$ $\int dt'$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Studio esplicito delle leggi orarie



$$\begin{cases} x = v_{0x} t \\ v_x = v_{0x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = v_{0y} - g t \end{cases}$$

t_M: $v_y = 0$

$\Leftrightarrow \quad t_M = v_{0y}/g$

$t_V = 2 t_M = 2 v_{0y}/g$

$y_M = y(t_M) = v_{0y}^2/2g$

stesso risultato già visto indipendente da x!

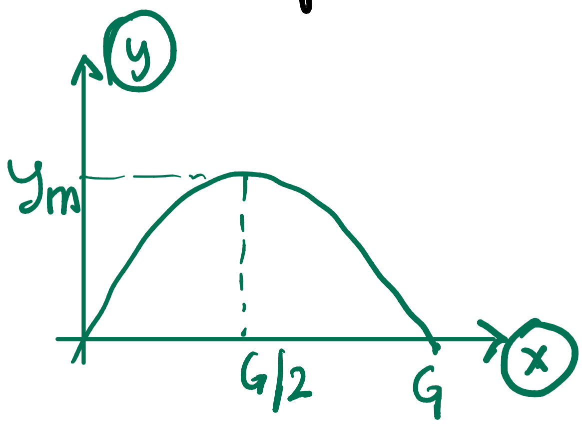
$$x(t = t_V) \equiv G = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad [\text{gittata}].$$

CONTROLLARE LE DIMENSIONI !!

Adesso si può determinare la traiettoria!

$$x = v_{0x} t \Rightarrow t = x/v_{0x} \Rightarrow \boxed{y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}}$$

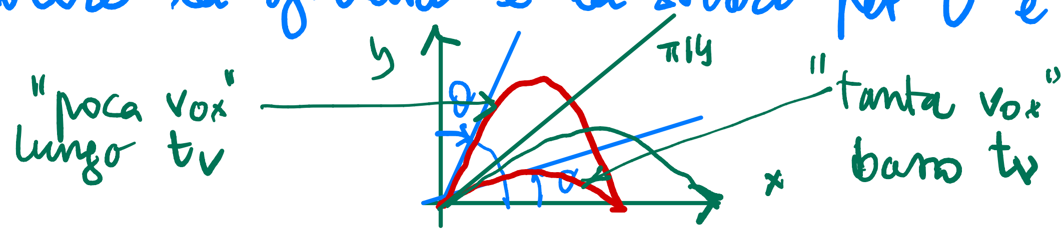
che è una parabola con vertice in $x_A = \dfrac{v_{0x} v_{0y}}{g} = G/2$



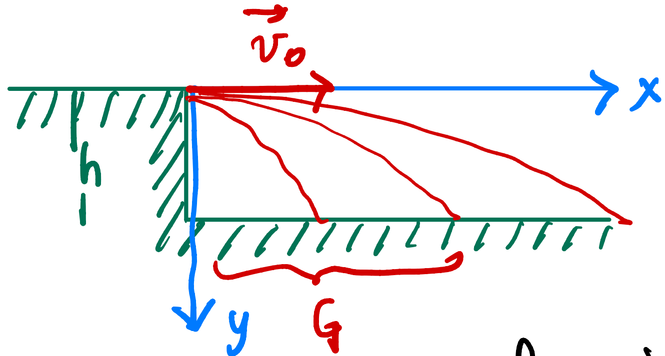
▶ Notare che G è massima, fissata v_0, quando $\sin 2\theta = 1$ o $\theta = \pi/4 = \theta_{max}$ e

$G_{max} = v_0^2/g$, $\quad y_{m,max} = \dfrac{v_0^2}{4g}$

▶ Inoltre la gittata è la stessa per θ e $\theta' = \pi/2 - \theta$



Notare anche (colubrina di Galilei):



$$y=\tfrac{1}{2}gt^2 , \quad x=v_0 t$$

$$y=\tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}$$

$$t_V=\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow G= v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$\Rightarrow$ al variare di v_0 cambia la gittata ma non il tempo di caduta!

Interessante e importante anche la rappresentazione intrinseca (già anticipata)

$x=v_{0x}t$ $y=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$	$\dot{x}=v_{0x}$ $\dot{y}=v_{0y}-gt$	$\ddot{x}=0$ $\ddot{y}=-g$

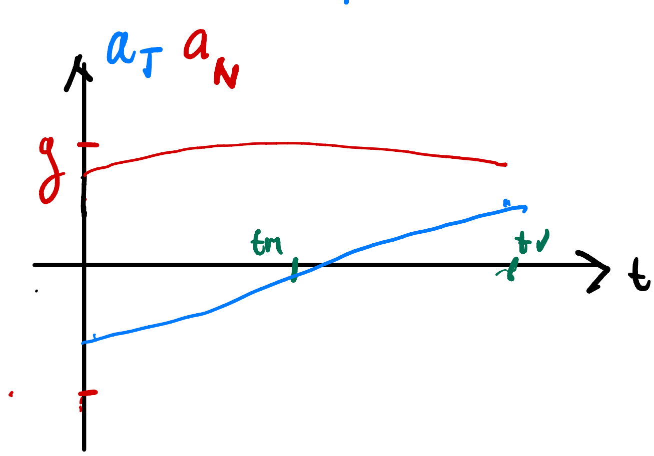
$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{v_{0x}^2+(v_{0y}-gt)^2}$$

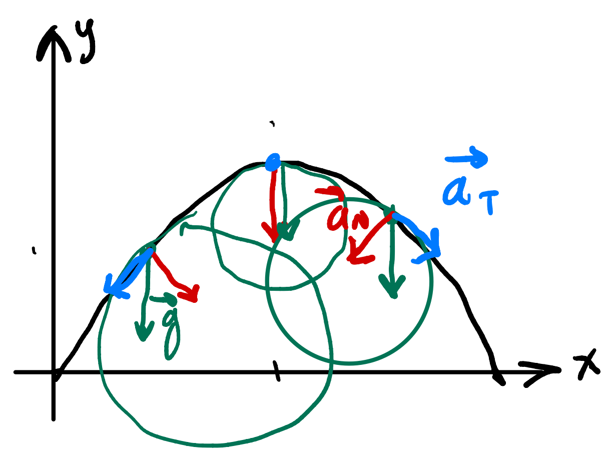
$a=g$

$$a_T=\dot{v}=-\frac{(v_{0y}-gt)\cdot g}{\sqrt{v_{0x}^2+(v_{0y}-gt)^2}} \; ; \quad a_N=\sqrt{a^2-a_T^2}=g\sqrt{1-\frac{(v_{0y}-gt)^2}{v_{0x}^2+(v_{0y}-gt)^2}}$$

$$=\frac{g\,v_{0x}}{\sqrt{v_{0x}^2+(v_{0y}-gt)^2}}$$

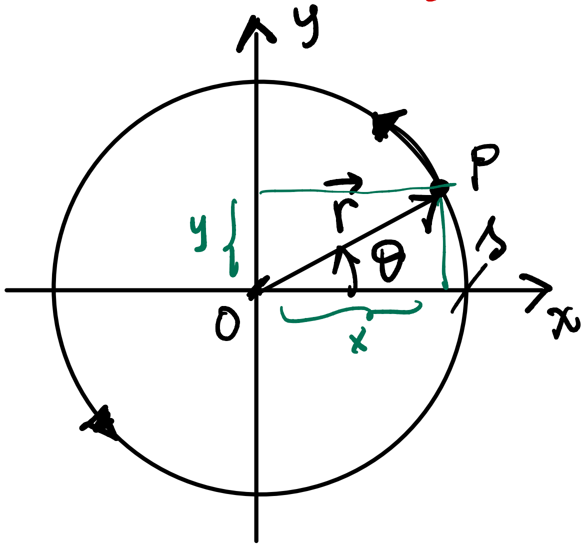
Dev'essere $a_N=\frac{v^2}{\rho}=v^2K$ con $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{g\,v_{0x}}{[v_{0x}^2+(v_{0y}-gt)^2]^{3/2}}$





(B) Studio del moto circolare (traiettoria assegnata)

cerchio di raggio R



$|\vec r| = R$.

Rappresentazione polare

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \qquad \theta = \frac{s}{R}$$

La velocità stradale è

$$v_s = \dot s = \frac{d}{dt}(\theta R) = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

dove $\omega = \dot\theta$ è la velocità angolare (rad/s, $[T]^{-1}$), $v_{(s)} = R\omega$

Caso speciale per ora di ω = costante $\Rightarrow$ moto circolare UNIFORME

$\Rightarrow$ dalla $s = s_0 + v_{(s)}t$ dividendo per R $\Rightarrow$ $\theta = \theta_0 + \omega t$

Preso $\theta_0 = 0$, nel moto circolare di raggio R valgono le

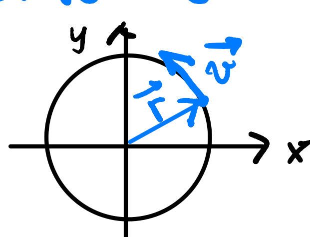
$$\begin{cases} x(t) = R\cos\omega t \\ y(t) = R\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot x = -\omega R\sin\omega t \\ v_y = \dot y = +\omega R\cos\omega t \end{cases}$$

Osservare bene che, secondo questa rappresentazione,

$$v = |\vec v| = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2} = \omega R$$ (come ci si aspetta) e

$$\vec v \cdot \vec r = \dot x x + \dot y y = -\omega R^2 \sin\omega t\cos\omega t + \omega R^2 \sin\omega t\cos\omega t = 0$$

$\Rightarrow$ $\vec v \perp \vec r$ come deve essere visto il significato vettoriale di $\vec v$



Per ora ω non è (ancora) un vettore

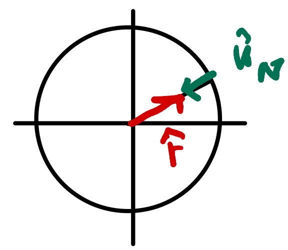
Per quanto riguarda l'accelerazione si prosegue nel modo previsto:

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2 R \cos\omega t = -\omega^2 x$$
$$a_y = \ddot{y} = -\omega^2 R \sin\omega t = -\omega^2 y \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

e quindi tutta l'accelerazione è normale ovvero QUI sempre centripeta di intensità $|\vec{a}| = a = \omega^2 R = v^2/R$

che torna con l'espressione già ottenuta

$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \frac{v^2}{R}(-\hat{r})$$



Inoltre il moto ha natura periodica (si ripete nel tempo) con periodo definito dal tempo richiesto per «un giro»,

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \equiv \frac{1}{\nu}$$

$\nu = 1/T = \omega/2\pi$ è la frequenza ($[T^{-1}]$, hertz, Hz), ripetizioni al secondo

Se il moto non avviene con v costante

$\Rightarrow$ c'è ACCELERAZIONE TANGENZIALE (ANGOLARE) a partire dalla solita scrittura curvilinea:

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \quad (\text{moto UNIFORMEMENTE VARIO})$$

divido R:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{dove} \quad \omega_0 = \frac{v_0}{R}, \quad \alpha = \frac{a}{R} \quad (s^{-2})$$

α è (per ora solo in modulo) l'accelerazione angolare che è legata a quella stradale dalla

$$a_T = \ddot{s} = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \ddot{s}/R = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

e possiamo proiettare sulle direzioni T e N:

$$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T = \omega^2 R\, \hat{u}_N + \quad R\, \hat{u}_T$$

ma anche ω e α avranno tra poco sostanza vettoriale.

Prima però un semplice caso di studio (moto circolare uniformemente vario)

$\omega_0 = 0 \ \frac{rad}{s}$ prima fase di accel. costante $\alpha_1 = 0.1 \ \frac{rad}{s^2}$ per 10 s

Poi ω raggiunta è mantenuta per 15 s.

Seconda fase accelerata di arresto con α_2 costante in 20 s.

Quanti giri in tutto vengono fatti dalla giostra?

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \, 0.1 \ \frac{rad}{s^2} \times 100 \ s^2 = 5 \ rad$$

$$\omega_1 = \alpha_1 t_1 = 0.1 \ \frac{rad}{s^2} \times 10 \ s = 1 \ rad/s$$

Angolo percorso nei 15 s con $\omega = \omega_1$:

$$\theta_2 = \omega_1 t_2 = 1 \ \frac{rad}{s} \times 15 \ s = 15 \ rad$$

Arresto con α_2 a partire dalla legge oraria

$$\omega = \omega_1 - \alpha_2 t_3 = 0 \iff \alpha_2 = \frac{\omega_1}{t_3} = \frac{1 \ rad/s}{20 \ s} = 0.05 \ \frac{rad}{s^2}$$

Angolo percorso:

$$\theta_3 = \omega_1 t_3 - \frac{1}{2}\alpha_2 t_3^2 = 1 \ \frac{rad}{s} \times 20 \ s - \frac{1}{2} \times 0.05 \ \frac{rad}{s^2} \times 400 \ s^2 =$$

$$= 20 \ rad - 10 \ rad = 10 \ rad$$

Angolo totale $\theta_{TOT} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 30 \ rad = \frac{30}{2\pi} \ giri \simeq 4.8 \ giri$