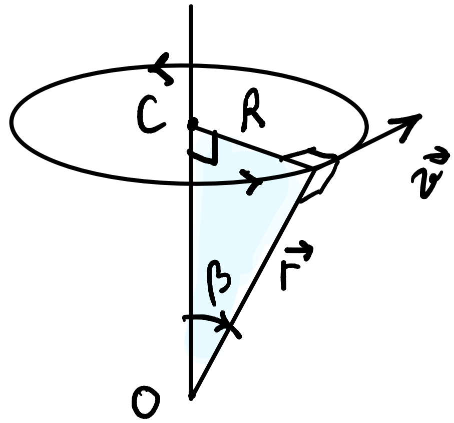
È arrivato il momento di introdurre le caratteristiche vettoriali delle grandezze cinematiche rotazionali.

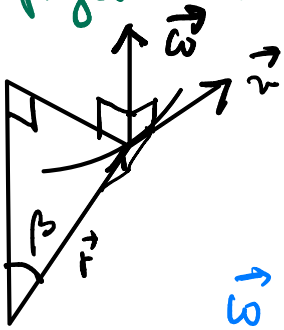


Si parte dalla definizione di velocità angolare $v = \omega R$

e dalla $R = r \sin\beta$

$\rightarrow \quad v = \omega r \sin\beta$

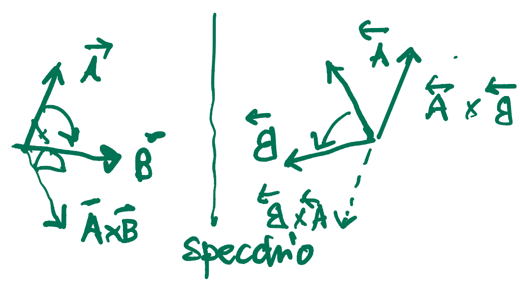
Osservando l'orientazione dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{r}$ questa relazione funziona se introduciamo il "VETTORE" $\vec{\omega}$ orientato come in figura e dunque, essendo β il minor angolo tra $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$, possiamo scrivere



$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$\vec{\omega}$ è perpendicolare al piano di rotazione del punto e orientato in accordo con il verso di avanzamento della vite.

NB

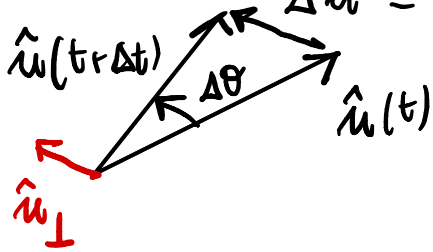


Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si riflettono "bene" sono vettori "assiali" ma allora $\vec{A} \times \vec{B}$ si ribalta nella riflessione $\Rightarrow$ è un vettore polare o pseudovettore. Questo è il caso di $\vec{\omega}$.

Si ottiene subito una formula / teoremino sulla rapidità di rotazione di un vettore unitario: è la

REGOLA di POISSON $\rightarrow$

$$\Delta\hat{u} = \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)$$



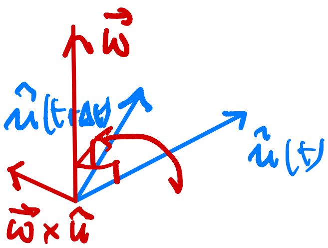
$$\Rightarrow \quad \Delta\hat{u} \simeq \Delta\theta \cdot \hat{u}_\perp$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta\hat{u}}{\Delta t} \simeq \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\,\hat{u}_\perp$$

$$\dot{\hat{u}} = \omega\,\hat{u}_\perp \quad \Leftarrow$$

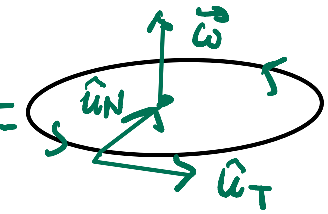
Però questa può essere anche scritta usando il vettore $\vec{\omega}$:



$$\boxed{\dot{\hat{u}} = \vec{\omega}\times\hat{u}}$$

È anche il caso "trasversale"

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\omega}\times\hat{u}_T &= \omega\,\hat{u}_N = \dot{\hat{u}}_T \\ \vec{\omega}\times\hat{u}_N &= -\omega\,\hat{u}_T = \dot{\hat{u}}_N \end{aligned}} \quad \Longleftarrow$$



Questo risulta valido anche per VETTORI in rotazione (più avanti)

Siamo ora in grado di ottenere la natura vettoriale esplicita dell'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

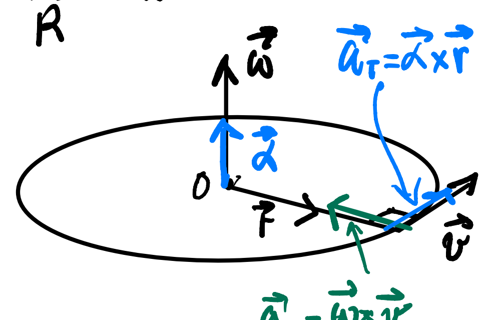
da confrontare con la rappresentazione intrinseca già ricavata:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \alpha R\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N$$

Quindi

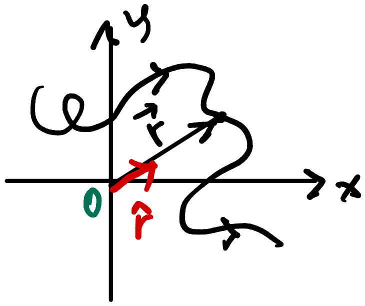
$$\vec{a}_T = \alpha R\,\hat{u}_T = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} = \vec{\alpha}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$



controllare sempre direzioni e dimensioni!!!

Studio di un moto piano curvo in rappresentazione POLARE : $(x(t), y(t)) \to (r(t), \theta(t))$



$$\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{r}(t)$$ [NB la dipendenza temporale]

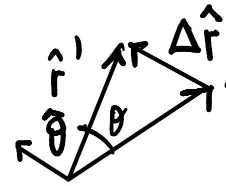
Vogliamo ovviamente $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\cdot\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\,\hat{r} + r\,\frac{d\hat{r}}{dt}$$

rapidità di "allontanamento" da O

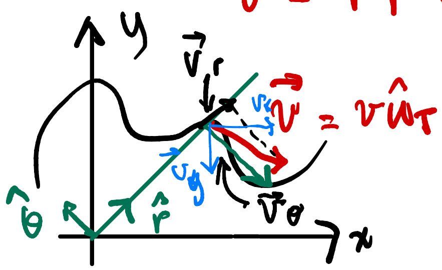
rapidità di rotazione attorno a O

usiamo la regola di Poisson, $\dot{\hat{r}} = \vec{\omega}\times\hat{r} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$



$\hat{\theta}$ è il versore della direzione TRASVERSALE (che NON è in generale la tangente, v. anche dopo) :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \equiv v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta} \qquad \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega \end{cases}$$



$$\vec{v} = \hat{\imath}\,v_x + \hat{\jmath}\,v_y = \hat{r}\,\dot{r} + \hat{\theta}\,r\dot{\theta}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2}$$

Poi si continua con l'accelerazione, stessa tecnica anche se il conto è (più) lungo :

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right) = \underbrace{\ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\hat{r}}}_{} + \underbrace{\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}}_{}$$

con Poisson $\begin{cases} \dot{\hat{r}} = \vec{\omega}\times\hat{r} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = \vec{\omega}\times\hat{\theta} = -\dot{\theta}\,\hat{r} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\,\hat{r} =$$

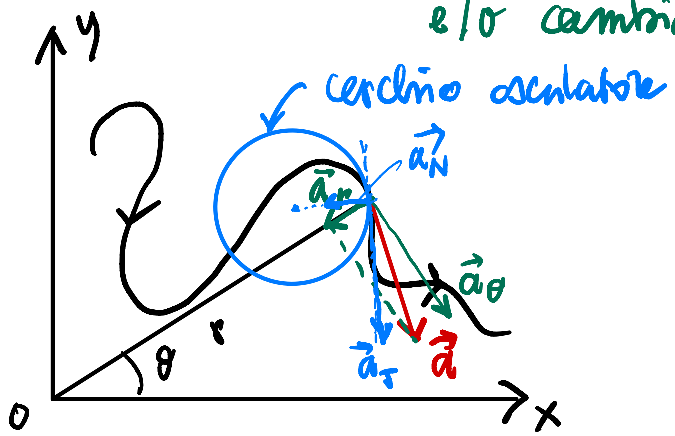
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

che scriviamo anche come $\vec a = a_r \hat r + a_\theta \hat\theta$

con $a_r = \ddot r - r\dot\theta^2$, $a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$ [componenti radiale e trasversale di $\vec a$]

Perché ci sia a_r dev'esserci cambiamento di v_r ($\ddot r \neq 0$)
e/o cambiamento di θ ($\dot\theta \neq 0$)

Perché ci sia a_θ dev'esserci cambiamento di ω ($\ddot\theta \neq 0$),
e/o cambiamento sia di r che di θ ($\dot r \neq 0$, $\dot\theta \neq 0$)



$\vec a = \vec a_x + \vec a_y = \vec a_N + \vec a_T = \vec a_r + \vec a_\theta$

$a_x = \ddot x$, $a_y = \ddot y$

$a_N = \dot s^2/\rho$, $a_T = \ddot s$

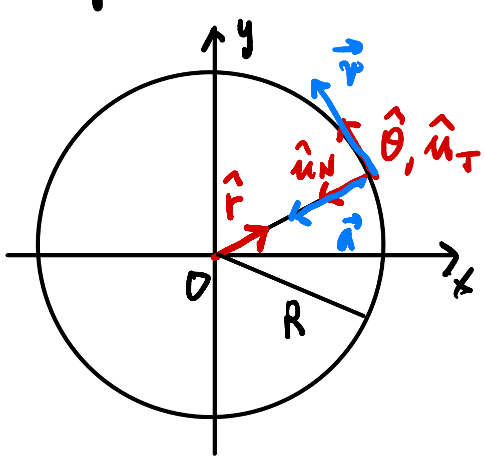
$a_r = \ddot r - r\ddot\theta$, $a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$

NOTARE MOLTO BENE : a_r non è solamente $\ddot r$!
a_θ non è solamente $r\ddot\theta$!

E a_θ non è nemmeno $\frac{d}{dt} v_\theta \underset{\text{infatti}}{=} \frac{d}{dt}(r\dot\theta) = r\ddot\theta + \dot r\dot\theta$

e manca uno che viene da $\frac{d}{dt} v_r$!

Esempio della circonferenza



$\vec v = \dot s \,\hat u_T$
$\vec a = \ddot s \,\hat u_T + \frac{\dot s^2}{R} \hat u_N$] rappresentazione intrinseca

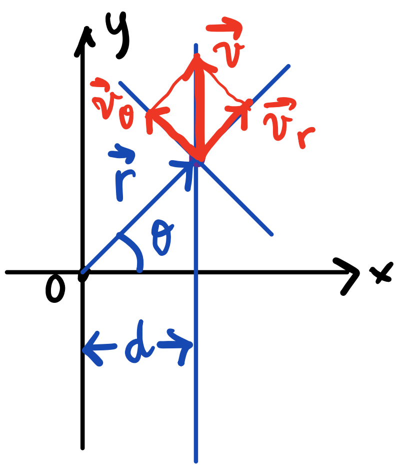
$\vec v = \cancel{\dot r}\hat r + R\dot\theta\hat\theta = R\omega\hat\theta = v_\theta\hat\theta$

$\vec a = (\cancel{\ddot r} - R\dot\theta^2)\hat r + (R\underset{\alpha}{\ddot\theta} + 2\cancel{\dot r}\dot\theta)\hat\theta$

$= -R\omega^2 \hat r + R\alpha\hat\theta$] rappres. polare

$\vec a = \omega^2 R \,\hat u_N = -\omega^2 R \,\hat r$

Caso di studio



Moto rettilineo uniforme visto in coordinate polari da O :

$$\vec v = \overrightarrow{\text{costante}} \; , \quad \vec a = \dot{\vec v} = \vec 0$$

Rappresentazione cartesiana

$$\begin{cases} x = d \\ y = vt \end{cases} \quad \begin{cases} \dot x = 0 \\ \dot y = v \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot x = 0 \\ \ddot y = 0 \end{cases}$$

[per $t=0$ il punto è nell'origine]

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{d^2+v^2t^2} \; , \quad v_r = \dot r = \frac{d}{dt}\sqrt{d^2+v^2t^2}$$

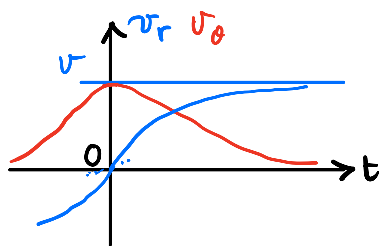
$$\Rightarrow \quad v_r = \frac{v^2 t}{\sqrt{d^2+v^2t^2}}$$

Calcolo di v_θ a partire da $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$ $\Rightarrow$

$$v_\theta = \sqrt{v^2 - v_r^2} = \sqrt{v^2 - \frac{v^4t^2}{d^2+v^2t^2}} = \frac{vd}{\sqrt{d^2+v^2t^2}} \; , \quad \dot\theta = \frac{v_\theta}{r} = \frac{vd}{d^2+v^2t^2}$$

NB: $v_r(0) = 0 \qquad v_r(\infty) = v$

$v_\theta(0) = v \qquad v_\theta(\infty) = 0$



NB: v_r aumenta col tempo in modulo ma anche cambia direzione allineandosi con la verticale (dà un contributo ad $\vec a$ lungo $\hat\theta$)

v_θ diminuisce col tempo (per $t>0$) in modulo ma anche varia direzione spostandosi verso l'orizzontale (dà un contributo ad $\vec a$ lungo $\hat r$).

Calcolo di $\vec a_r, \vec a_\theta$ che già sappiamo devono essere vettori nulli:

$$\ddot r = \frac{d}{dt}\frac{v^2t}{\sqrt{d^2+v^2t^2}} = \frac{v^2d^2}{(d^2+v^2t^2)^{3/2}} \; ; \quad r\dot\theta^2 = \ddot r \; \Rightarrow \; a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = 0 \; ;$$

$$\ddot\theta = \frac{d}{dt}\frac{vd}{d^2+v^2t^2} = -\frac{2v^3d\cdot t}{(d^2+v^2t^2)^2} \; \Rightarrow \; r\ddot\theta = -\frac{2v^3d\cdot t}{(d^2+v^2t^2)^{3/2}}$$

$$-2\dot r\dot\theta = r\ddot\theta \; \Rightarrow \; a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = 0$$