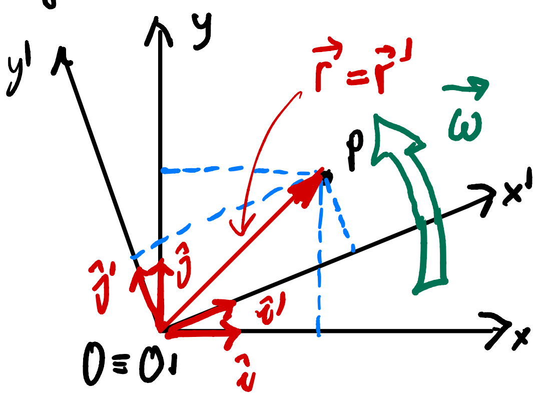
Per quanto riguarda il « trascinamento rotazionale » tra due riferimenti:

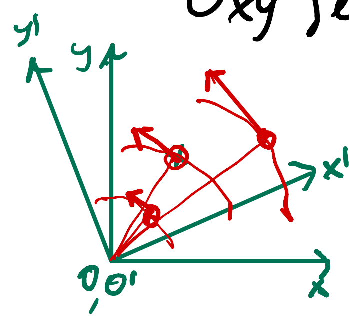


Ci sono due scomposizioni cartesiane del vettore di posizione $\vec{r} = \vec{r}'$:

$$x\hat{i} + y\hat{j} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}'$$

e da qui partiamo per ottenere le espressioni per $\vec{v}$ e $\vec{a}$ (viste da Oxy) e $\vec{v}'$ e $\vec{a}'$ (viste da O'x'y').

Intuitivamente:



Oxy vede tutti i punti fissi di O'x'y' trascinati con velocità $\vec{\omega} \times \vec{r}$ (o $\vec{\omega} \times \vec{r}'$)

Se c'è un punto che si muove visto da O'x'y' con velocità $\vec{v}'$, questa si deve aggiungere alla velocità "di trascinamento" che vede Oxy se vogliamo ottenere in questo riferimento la velocità $\vec{v}$ del punto. Ci si aspetta quindi che debba risultare $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ ovvero $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}$

Calcolo esplicito (importante il metodo poi anche per $\vec{a}$):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}}_{\text{visto da Oxy}} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}(x'\hat{i}' + y'\hat{j}')}_{\text{visto da O'x'y'}} =$$

$$= \underbrace{\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}'}_{\hat{i}' \text{ e } \hat{j}' \text{ fissi}} + \underbrace{x'\dot{\hat{i}}' + y'\dot{\hat{j}}'}_{\text{gli assi di O'x'y' ruotano secondo Oxy}}$$

$\Rightarrow$ questa è $\vec{v}'$

si usa Poisson:

$$\dot{\hat{i}}' = \vec{\omega} \times \hat{i}' \qquad \dot{\hat{j}}' = \vec{\omega} \times \hat{j}' \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \vec{\omega} \times (x'\hat{i}' + y'\hat{j}') = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$ trascinamento

e anche $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}$ come anticipato.

Funziona, perché se fissiamo il punto in $O'x'y'$ è $\vec{v}' = \vec{0}$ e allora

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ [c'è trascinamento]

mentre, se il punto è fissato in Oxy è $\vec{v} = \vec{0}$ e allora $O'x'y'$ vede $\vec{v}' = -\vec{\omega} \times \vec{r}$ [trascinamento "dall'altro"]

Passiamo al calcolo dell'accelerazione: formalmente il conto è semplice ma bisogna fare molta attenzione all'interpretazione.

Ci aspettiamo anche qui un'accelerazione "ovvia" di trascinamento quando misuriamo in Oxy l'accelerazione di punti fissi in $O'x'y'$. Ma c'è dell'altro.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$. I due termini uno alla volta

Attenzione al I termine: $\dot{\vec{v}}'$ NON È $\vec{a}'$ PERCHÈ QUESTA VIENE MISURATA CON ASSI $\hat{i}'$ e $\hat{j}'$ FISSI.

Invece: $$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}') = \underbrace{\ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}'}_{\text{questa è } \vec{a}'} + \underbrace{\dot{x}'\dot{\hat{i}}' + \dot{y}'\dot{\hat{j}}'}_{\text{questa si riscrive con Poisson: } \vec{\omega} \times (\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}')}$$

quindi $$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Il II termine: $$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad \begin{cases} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{cases}$$

quindi $$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

In definitiva

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' \equiv$$

$$\equiv \vec{a}' + \vec{a}_{TRASC} + \vec{a}_C$$

$\vec{a}_{TRASC} \equiv \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ di trascinamento

$\vec{a}_C \equiv 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ complementare

ATTENZIONE Vero che $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{TRAS}$ e quindi

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{TRASC}}{dt}$$

$\vec{v}_{TRASC} = \vec{\omega}\times\vec{r}'$

ma questa espressione NON È $\vec{a}' + \vec{a}_{TRASC}$.

Infatti $\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}'$, $\frac{d\vec{v}_{TRASC}}{dt} = \vec{a}_{TRAS} + \vec{\omega}\times\vec{v}'$

e quindi $\frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{TRASC}}{dt} = \vec{a}' + \vec{a}_{TRASC} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$

in questo senso è complementare

Scrittura spesso utilizzata:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\alpha}\times\vec{r} \underbrace{- \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{accelerazione CENTRIFUGA}} \underbrace{- 2\vec{\omega}\times\vec{v}'}_{\text{accelerazione di CORIOLIS}}$$

Ancora i casi notevoli: punto FISSO in $O'x'y'$ $(\vec{v}' = \vec{0}, \vec{a}' = \vec{0})$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{v}_{TRASC}, \quad \vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{tangente}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{centripeta}} = \vec{a}_{TRASC}$$

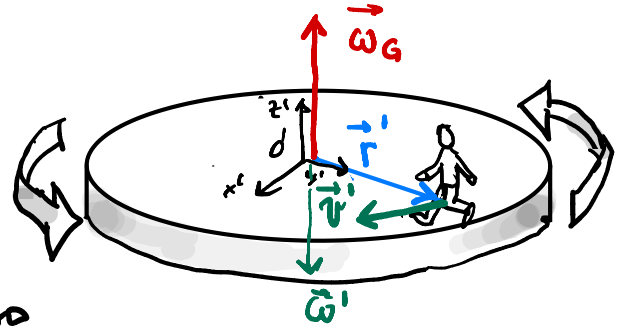
punto fisso in Oxy $(\vec{v} = \vec{0}, \vec{a} = \vec{0}) \Rightarrow \vec{v}' = -\vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\vec{a}' = -\vec{\alpha}\times\vec{r} - \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}] - 2\vec{\omega}\times(-\vec{\omega}\times\vec{r}) = \underbrace{-\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{tangenziale}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{centripeta}}$$

è comunque centripeta!

NOTARE il RUOLO della accelerazione di Coriolis

Esercizio: La giostra di Coriolis



La persona cammina a distanza $R=|\vec r'|$ dal centro della giostra con velocità costante in modulo $v'=|\vec v'|$ riferita alla giostra stessa e diretta contro il suo verso di rotazione che avviene con velocità angolare costante $\omega_G = |\vec\omega_G|$.

Si vogliono calcolare $\vec v$ e $\vec a$ della persona rispetto al riferimento fisso (del "parco giochi") Oxy [il riferimento solidale alla giostra è O'x'y'].

Rispetto O'x'y' (sulla giostra) la persona fa un moto circolare uniforme:

$\vec v' = \vec\omega' \times \vec r'$ dove $\vec\omega'$ è la velocità angolare della persona

centripeta! → $\vec a' = \vec\omega'\times\vec v' = \vec\omega'\times(\vec\omega'\times\vec r')$

con moduli $v'=\omega' R$, $a'=\omega'^2 R = v'^2/R = \omega' v'$

Nel parco giochi [Oxy] scriviamo le trasformazioni cinematiche

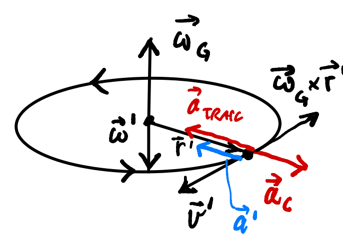
$$\vec v = \vec v' + \vec\omega_G\times\vec r' = \vec\omega'\times\vec r' + \vec\omega_G\times\vec r' = (\vec\omega'+\vec\omega_G)\times\vec r' \quad \leftarrow \text{tangente!}$$

con modulo $v = |\omega'-\omega_G|R$: è quello che ci si aspetta per la velocità della persona "trascinata" «all'indietro» con $v_G=\omega_G R$

[il segno meno è perchè le due rotazioni sono di verso opposto]

$$\vec a = \vec a' + \vec a_{TRASC} + \vec a_C = \vec a' + \vec\omega_G\times(\vec\omega_G\times\vec r') + 2\vec\omega_G\times\vec v'$$

[$\dot{\vec\omega}\times\vec r' = \vec 0$ perchè $\vec\omega_G = \text{cost}$] centripeta centripeta centrifuga



Proiettando in direzione centripeta quindi

$$a = a' + \omega_G^2 R - 2\omega_G v' = \omega'^2R+\omega_G^2R - 2\omega_G\omega' R = (\omega'-\omega_G)^2R$$

che è la giusta accelerazione centripeta del moto circolare che vede il parco giochi della persona con velocità $v=|\omega'-\omega_G|R$.

Notare anche qui il ruolo di $\vec a_C$: in modulo $a=(\omega'-\omega_G)^2R$, $a'=\omega'^2R$, $a_{TRASC}=\omega_G^2R$ per cui $a \neq a'+a_{TRASC}$, manca a_C!