Uso PRATICO delle EQUAZIONI del MOTO

→ Casi di studio della dinamica del punto materiale

Tenere presente le regole generali

- Utilizzo di sistemi di riferimento INERZIALI
- Individuazione dell'oggetto di studio anche in funzione di vari vincoli esterni (v. di seguito)
- Scrittura delle leggi vettoriali del moto
- Individuazione di sistemi di riferimento adatti e proiezioni delle equazioni di moto

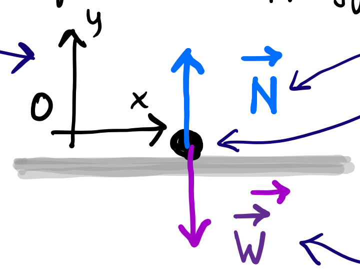
Usare la $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ o $\vec{F} = m\vec{a}$ è consentito dopo che la natura della forza $\vec{F}$ è stata chiarita fino in fondo.

→ VINCOLI MECCANICI

I più semplici sono piani di appoggio lisci e orizzontali :

Riferimento inerziale

reazione VINCOLARE : descrive il vincolo.



punto materiale di massa m

piano : vincolo "unilaterale" (agisce solo in un semipiano)

forza peso del punto, $\vec{W} = m\vec{g}$

In questo caso (noioso ma utile) l'equazione del moto è « statica », se non si vuole che il piano si sfondi lasciando accelerare il punto :

$$\vec{F} = \vec{N} + \vec{W} = m\vec{a} = \vec{0}$$

condizione di EQUILIBRIO (statico)

Se il punto è lasciato fermo nel riferimento inerziale Oxy, essendo in equilibrio ($\vec{F} = \vec{0}$), rimane in quiete.

Si può proiettare lungo la direzione y l'equazione del moto :

attenzione !

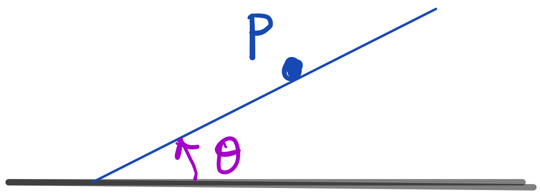
$$Oy: \quad F_y = N - W = 0 \quad \text{ovvero}$$

$N = W = mg$ ⇒ è la soluzione statica : il piano deve sostenere il peso del punto, mg.

Il Piano Inclinato

È un primo caso di costruzione, studio e applicazione di una equazione del moto.

Problema "fisico"



Modello Ideale

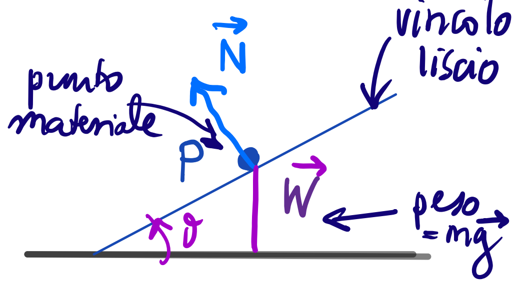
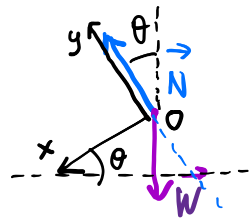


Diagramma di "corpo libero" con assi coordinati



Il vincolo è sostituito da forze opportune. In questo caso da un'unica reazione vincolare $\vec{N}$ perpendicolare al piano perché liscio.

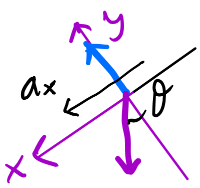
Equazione del moto (in un sistema di riferimento inerziale):

$$\boxed{\vec{F} = \vec{N} + \vec{W} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}}$$

forza totale sul punto — composizione vettoriale — massa inerziale.

Si proietta l'equazione del moto su un sistema di assi «opportuno» ← NB vuol dire COMODO

Nel caso illustrato si assume che le variazioni di moto (accelerazione) siano tutte lungo il piano (asse x) e perpendicolarmente a esso ci sono invece condizioni statiche (il punto non decolla né sfonda il piano):



$$\vec{F} = \vec{W} + \vec{N} = m\vec{a} \qquad \begin{cases} +W\sin\theta + 0 = ma_x = ma & \leftarrow \text{lungo } x \quad [a = a_x] \\ -W\cos\theta + N = ma_y = 0 & \leftarrow \text{lungo } y \end{cases}$$

Quindi $\begin{cases} ma = W\sin\theta \\ N = W\cos\theta \end{cases} \Rightarrow a = \frac{W}{m}\sin\theta = \frac{m_g}{m_I}g\sin\theta = g\sin\theta$

massa inerziale (m) — massa gravitazionale (m_g) — $m_I = m_g$.

L'accelerazione (lungo x, direzione del piano) è $a = g\sin\theta$
e la reazione del piano è $N = P\cos\theta = mg\cos\theta$.

Suggerimento: non usare $\theta = \pi/4$ nei disegni per non confondere $\sin\theta$ e $\cos\theta$!

NB 1

data l'accelerazione si possono ricavare le altre leggi orarie cinematiche,

$$\begin{cases} v = v_0 + at = v_0 + g \operatorname{sen}\theta \, t \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(g \operatorname{sen}\theta) t^2 \end{cases}$$

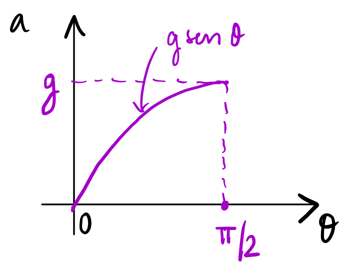
con $v_0 = v(t=0)$ e $x_0 = x(t=0)$ assegnati a parte come condizioni iniziali del moto.

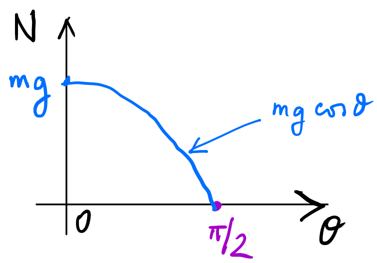
NB 2

verificare sempre la correttezza dimensionale dei risultati

NB 3

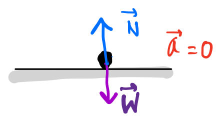
considerare la rappresentazione grafica dei risultati e dei casi (eventualmente numerici) particolari



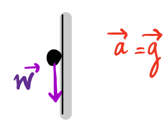


Si osservano i casi particolari

$\theta = 0$ (piano orizzontale, accelerazione nulla, reazione N massima e pari al peso totale)

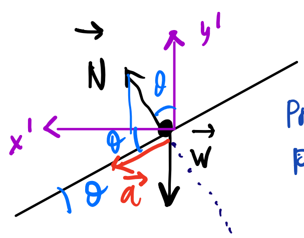


$\theta = \pi/2$ (parete verticale, accelerazione totale pari a quella di gravità, reazione N nulla, il vincolo è di fatto ininfluente).



NB 4

Vale la pena provare a risolvere questo stesso esempio utilizzando altri assi coordinati



Proiezione lungo x': $N \operatorname{sen}\theta = m a_{x'} = m a \cos\theta$

proiezione lungo y': $N \cos\theta - W = m a_{y'} = -m a \sin\theta$

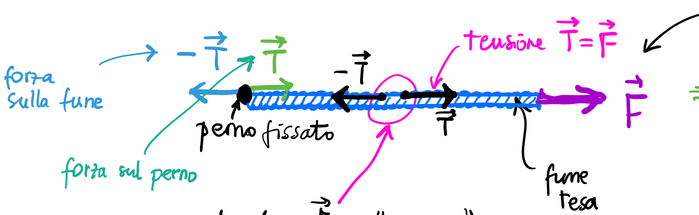
stessi risultati di prima ma con più passaggi.

FUNI e CATENE

Si utilizzano corde ideali, che sono « per definizione »

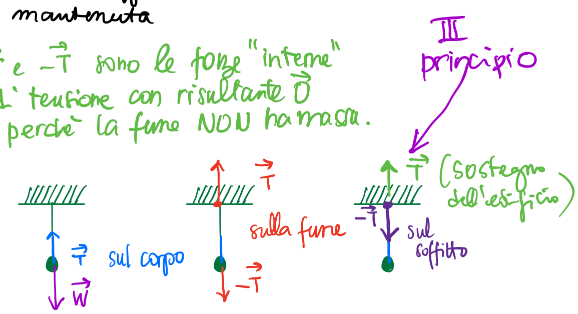
- senza massa (non hanno inerzia e non pesano)
- perfettamente flessibili (forma adattabile ma possono solamente tirare)
- inestensibili (altrimenti si comportano come molle o elastici)

Le funi trasmettono uno stato di TENSIONE (forza) secondo la loro direzione. Oltre un valore massimo (carico di rottura) cedono strutturalmente.



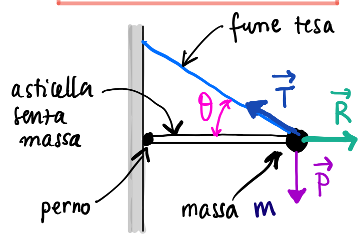
la forza $\vec{F}$ si "propaga" come tensione della fune in tutti i suoi tratti con continuità

$\vec{T}$ e $-\vec{T}$ sono le forze "interne" di tensione con risultante $\vec{0}$ perché la fune NON ha massa.



NB si può parlare anche di ASTE sia in trazione CHE in compressione.

ESEMPIO "STATICO"



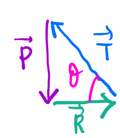
Il peso $\vec{P}$ della massa è fisso, di modulo mg e verticale verso "il basso".
La fune "tira" secondo la sua direzione con intensità incognita T
L'asticella "spinge" la massa "verso destra" con intensità incognita $\vec{R}$ per « resistenza » $\vec{T}$.

Le tre forze, se si chiede equilibrio statico, si devono compensare esattamente,

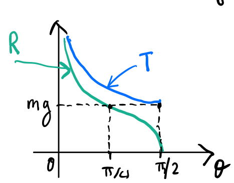
$$\vec{T}+\vec{P}+\vec{R}=0$$

Risoluzione geometrica (con il "triangolo delle forze")

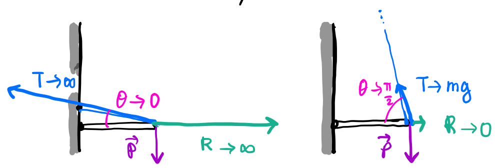
$$T\cos\theta=R\,,\quad T\sin\theta=P \quad\Rightarrow\quad R=\frac{P}{\tan\theta}\,,\quad T=\frac{P}{\sin\theta}$$



Le soluzioni vengono graficate:



Studio dei casi "estremi", $\theta=0$ e $\theta=\pi/2$



Quando la fune è "a rischio rottura" per superamento del carico massimo?