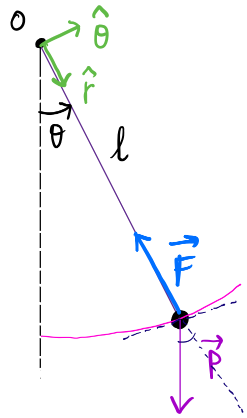
Il pendolo "semplice"

Studio dinamico di una massa puntiforme m trattenuta da una fune ideale di lunghezza ℓ in assenza di qualunque forma di attrito.



Il sistema viene schematizzato in termini di due forze: il peso $\vec{P}$ della massa sospesa e la tensione $\vec{F}$ della fune che ha la direzione del vincolo.

L'equazione del moto è dunque

$$\boxed{\vec{F}_{TOT} = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}}$$

Si adotta un sistema polare di coordinate (e versori) $(\hat{r}, \hat{\theta})$. Il sistema in concreto è completamente caratterizzato da un singolo grado di libertà cinematico, ovvero l'angolo θ individuato rispetto la direzione verticale.

Proiezione secondo $(\hat{r}, \hat{\theta})$ dell'equazione del moto.

$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$ con
$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= -\ell\omega^2, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \\ a_\theta &= \ell\alpha, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}}$$
ottenute in precedenza.

$$\Rightarrow \quad -m\ell\omega^2 = (\vec{P}+\vec{F})\cdot\hat{r} = P\cos\theta - F = mg\cos\theta - F$$
$$m\ell\frac{d\omega}{dt} = (\vec{P}+\vec{F})\cdot\hat{\theta} = -P\,\text{sen}\,\theta = -mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,\theta} \; ; \quad \boxed{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{\ell}\cos\theta + \frac{1}{m\ell}F}$$

NB: $\theta(t)$ [e dunque $\omega = d\theta/dt$] sono incognite; anche la tensione F è incognita.

L'equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,\theta$ è differenziale al II ordine nell'incognita $\theta(t)$, ma si può risolvere solo per piccole ampiezze della funzione $\theta(t)$ perché se vale

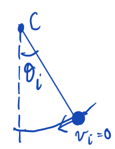
$$\text{sen}\,\theta \approx \theta \quad (\text{per } \theta \text{ "piccolo"})$$

allora $\frac{d^2\theta}{dt^2} \cong -\frac{g}{\ell}\theta$ che è l'equazione dell'oscillatore armonico semplice nella variabile $\theta(t)$ con pulsazione $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ e dunque periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Soluzione per la legge oraria (piccole ampiezze)

$$\theta(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) \qquad [\text{soluzione generale}]$$

NB1: i parametri A e ϕ si determinano utilizzando condizioni iniziali del moto appropriate all'istante iniziale (per esempio a $t=0$ il pendolo è lasciato libero da fermo a partire da un angolo iniziale θ_i).



La velocità del punto è tangenziale e si scrive $\vec{v} = v_\theta \hat{\theta} = l \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = l\omega \hat{\theta}$

che con la soluzione per piccoli angoli diventa

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow v = l\omega_0 A \cos(\omega_0 t + \phi).$$

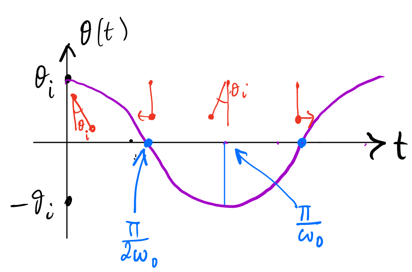
Sappiamo inoltre che $\theta_i = \theta(t=0) = A \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = \theta_i / A$

e $v(t=0) = l\omega_0 A \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2$

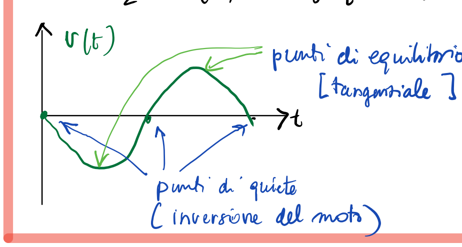
$\Rightarrow 1 = \theta_i / A \Leftrightarrow A = \theta_i$ e, in definitiva

soluzione particolare

$$\boxed{\theta(t) = \theta_i \operatorname{sen}(\omega_0 t + \pi/2) = \theta_i \cos \omega_0 t}$$



NB2 $v(t) = -l\omega_0 \theta_i \operatorname{sen} \omega_0 t$



NB3 Significato dell'approssimazione « per piccoli angoli »: dipende dalle cifre significative.

Per esempio: $\theta = 4° = 0{,}0698$ rad ; $\operatorname{sen} 4° = 0{,}0698 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ entro 3 cifre significative

$\theta = 11° = 0{,}1920$ rad ; $\operatorname{sen} 11° = 0{,}1908 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ entro 2 cifre significative ma NON entro 3 cifre significative.

N.B 4 Determinazione della tensione della fune F in funzione della posizione θ del punto

A partire dall'equazione di moto radiale

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{\ell}\cos\theta + \frac{1}{m\cdot\ell}F$$

si ottiene

$$\boxed{F = m\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\cos\theta = m\ell\omega^2 + mg\cos\theta}$$

Bisogna determinare la dipendenza della velocità angolare ω dalla posizione.

Si utilizza ancora l'equazione trasversale di moto, $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$

SENZA APPROSSIMAZIONI sull'ampiezza angolare.

moltiplicare per $d\theta$ entrambi i membri

$$\frac{d\omega}{dt}d\theta = -\frac{g}{\ell}\sin\theta\, d\theta$$

riscrivere

$$\omega\, d\omega = -\frac{g}{\ell}\sin\theta\, d\theta$$

integrare fra la posizione / velocità nell'istante iniziale e quella generica, cioè fra θ_i, ω_i e θ, ω

$$\int_{\omega_i}^{\omega}\omega\, d\omega = \frac{\omega^2}{2} = -g/\ell\int_{\theta_i}^{\theta}\sin\theta\, d\theta \qquad = -\cos\theta\Big|_{\theta_i}^{\theta}$$

risultato dell'integrale:

$$\omega^2 = \omega_i^2 + \frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\omega(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \omega_i^2}$$

è l'andamento della velocità in funzione della posizione θ

per $\omega_i = 0$ (per esempio) si sostituisce nella precedente

$$F(\theta) = m\ell\omega^2 + mg\cos\theta$$

$$\boxed{F(\theta) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)}$$

Si osserva che la tensione è sempre maggiore del carico «statico» $F_s = mg$.
Nel punto più basso $(\theta = 0)$ è $F_0 = mg[3 - 2\cos\theta_0]$. Se, per esempio, $\theta_0 = \pi/2$, $F_0 = 3mg$ [c'è «sovraccarico» per il moto circolare della massa].

N.B 5 Calcolo esplicito delle componenti radiale e trasversa dell'accelerazione:

$$\boxed{a_r = -\ell\omega^2 = -2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}\; ; \quad \boxed{a_\theta = \ell\frac{d\omega}{dt} = -g\sin\theta}$$

casi notevoli:

per $\theta = \theta_0$ $\quad a_r = 0$

$\quad a_\theta = -g\sin\theta_0 < 0$

per $\theta = 0$ $\quad a_r = -2g(1 - \cos\theta_0) < 0$

$\quad a_\theta = 0$