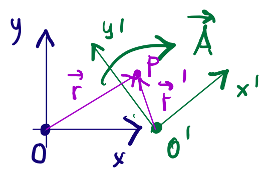
FORZE APPARENTI – NON INERZIALI

Ci si interessa allo studio della dinamica (effetti di forze) su sistemi materiali quando ci si trova in riferimenti NON inerziali.

Ci si aspetta che il I principio debba assicurare che, in un sistema di riferimento non inerziale, un punto materiale LIBERO non mantenga lo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme inizialmente posseduto.

Scrittura dell'equazione del moto vista in un riferimento accelerato (non galileiano):



$O'x'y'$ è accelerato rispetto Oxy con accelerazione $\vec{A}$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{OO'} \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{V} \\ \vec{a}' &= \vec{a} - \vec{A} \end{aligned}$$

Le accelerazioni del punto P in Oxy sono ottenute per azione della forza $\vec{F}$ agente su P (con massa inerziale m):

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Supponendo che m non cambi passando nel riferimento $O'x'y'$ si ha che

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A}$$

che si scrive anche $\boxed{\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_A}$:

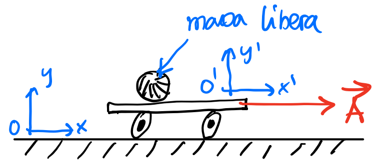
nel riferimento accelerato $O'x'y'$ la forza responsabile della variazione di moto del punto, $\vec{F}' = m\vec{a}'$, è DIFFERENTE dalla forza responsabile dell'accelerazione del punto vista in Oxy, $\vec{F} = m\vec{a}$.

Le forze differiscono di una forza detta «apparente» o «non inerziale» o anche fittizia data da

$$\boxed{\vec{F}_A = -m\vec{A}}$$

Le forze non inerziali sono reali negli effetti prodotti in riferimenti accelerati ma non sono imputabili a interazioni «sostanziali» (vincoli, gravitazione, elettromagnetismo, attriti, etc.).

FORZE NON INERZIALI : TRASLAZIONE

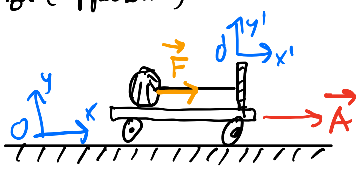


L'osservatore Oxy vede la massa in quiete perché libera nel riferimento inerziale:

$$\vec{0} = \vec{F} = m\vec{a}$$

L'osservatore O'x'y' vede la massa retrocedere con accelerazione $-\vec{A}$ per cui deduce una forza (apparente) tale che

$$\vec{F}' = -m\vec{A} \quad \text{compatibile con} \quad \vec{F}' = \underbrace{\vec{F}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{F}_A}_{=-m\vec{A}}$$



Qui l'osservatore Oxy vede la massa accelerata tramite la forza $\vec{F} = m\vec{A}$ (la tensione della fune) mentre O'x'y' vede la massa in equilibrio sotto l'azione di $\vec{F}$ e della forza apparente $\vec{F}_A = -m\vec{A}$ tale che

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_A = \vec{0} = m\vec{a}'$$

Esempio di forza apparente in un riferimento accelerato uniformemente in moto rettilineo: le forze sul guidatore di un automobile

Si utilizzano due sistemi di riferimento: Oxy solidale alla strada (inerziale) e O'x'y' solidale all'automobile (e al guidatore), dunque accelerato con accelerazione $\vec{A}$ costante pari all'accelerazione dell'automobile.
O'x'y' è NON inertiale.

massa del guidatore

Sul guidatore secondo Oxy agisce la forza $\vec{F} = m\vec{A}$ (provocata per esempio dall'interazione con il sedile) che accelera la massa m con accelerazione $\vec{A}$.

Secondo O'x'y' la situazione è di EQUILIBRIO perché in questo riferimento il guidatore non è accelerato e, lasciato fermo, rimane in quiete. Dunque secondo O'x'y'

$$\vec{a}' = 0 \quad \text{perché} \quad \vec{F}' = 0$$

questa relazione è compatibile con la trasformazione

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_A = 0 \quad \text{purché} \quad \vec{F}_A = -\vec{F}$$

che è infatti corretta perché $\vec{F} = m\vec{A}$ e $\vec{F}_A = -m\vec{A}$. Dunque per O'x'y' il guidatore è in equilibrio ma soggetto a due forze, quella «attiva» $\vec{F}$ (spinta del sedile) e quella «apparente», $-m\vec{A}$, in direzione opposta al moto, che la bilancia.

Forze non-inerziali : rotazioni

Il punto di partenza è la trasformazione delle accelerazioni fra riferimenti in rotazione relativa (già vista nella parte di cinematica):

$$\vec{a}' = \vec{a} - [\vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}']$$

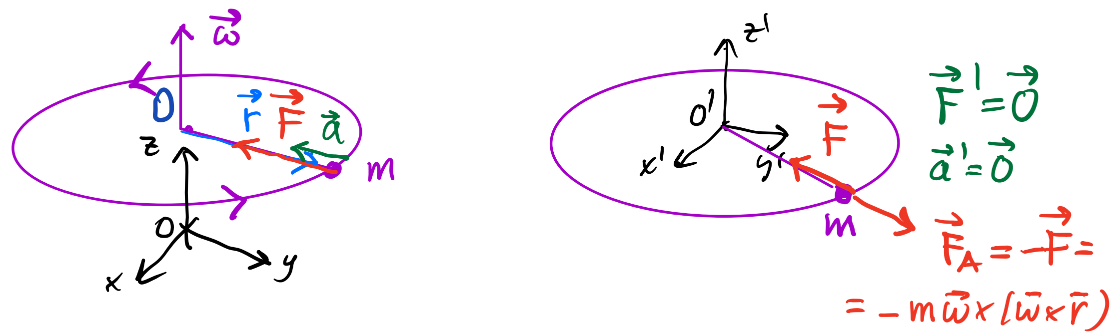
che viene riportata in termini di forze:

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_A \, ; \quad \vec{F}' = m\vec{a}', \quad \vec{F} = m\vec{a}, \quad \vec{F}_A = \vec{F}_{TRASC} + \vec{F}_{COR}$$

$\vec{F}_{TRASC} = -m[\vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]$ è la forza di trascinamento;

$\vec{F}_{COR} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$ è la forza di Coriolis o complementare.

Nella forza di trascinamento il termine $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ è il contributo centrifugo.



Confronto fra le descrizioni inerziale (a sinistra) e non-inerziale (a destra) della dinamica di una massa in rotazione uniforme. Nel riferimento Oxyz c'è solo la forza centripeta vincolare $\vec{F}$ che dà l'accelerazione normale $\vec{a}$. Nel riferimento O'x'y'z' c'è anche la forza apparente centrifuga $\vec{F}_A = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ che bilancia $\vec{F}$ e colloca m in equilibrio statico.

ATTRITO VISCOSO

È un tipo di attrito che nasce dall'interazione fra corpi solidi e sostanze fluide (gas o liquidi).
La situazione è molto complessa e richiede tecniche di analisi molto sofisticate, soprattutto in presenza di fenomeni «turbolenti», ovvero caratterizzati da moti caotici del fluido che incontra corpi solidi in movimento relativo.

Qui ci si limita al modello ideale e relativamente semplice di attriti fluidi secondo la legge di Stokes* lineare, valide per moti di fluido "laminari" (non turbolenti) e con velocità di movimento relativamente basse. Secondo questo modello si scrive, per la forza di attrito viscoso, la relazione

$$\boxed{\vec{F}_A = -k\vec{v}}$$

* gli oggetti per Stokes dovrebbero avere forma sferica.

coefficiente di proporzionalità: k grande (piccolo) implica attrito grande (piccolo) a parità di velocità: dipende dal tipo di fluido e dalla forma dell'oggetto.

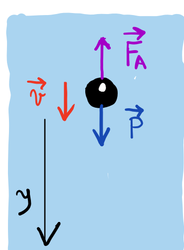
velocità del corpo nel fluido «viscoso»: $\vec{F}$ è sempre tale da opporsi al moto.

NB dimensioni di k

$[k] = [F]/[v] = \left[\frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}}\right] = [MT^{-1}]$ (kg/s nel SI)

regime turbolento — regime laminare

Si studia, come esempio, il moto di un corpo di massa m soggetto al suo peso e alla forza di Stokes di attrito viscoso dovuta all'interazione con un fluido. Si trascurano effetti dovuti alla spinta/forza idrostatica (di Archimede: c'è perchè il corpo è immerso nel fluido ma non se ne tiene conto).



Equazione del moto per la massa di peso $\vec{P}$ nel fluido con coefficiente di attrito k:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_A + \vec{P} = m\vec{a}$$

ovvero $\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}}$

Proiezione sull'asse y verticale verso "il basso" $\quad a = g - \beta v \quad$ dove si pone $\beta = k/m$

[NB: β si misura nel SI in s^{-1}, è un inverso di un tempo].

L'equazione di moto da risolvere è un'equazione differenziale del I ordine nell'incognita velocità v:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \beta v}$$

Si risolve per separazione di variabili. Si osserva che "intuitivamente", partendo con velocità nulla (v=0) agisce solo la forza peso che accelera la massa. Dunque nasce un attrito viscoso che tende a diminuire l'accelerazione (mentre la velocità continua ad aumentare). Dunque ci si aspetta una velocità «limite», v_{LIM}, quando l'accelerazione si annulla:

$$\boxed{a_{LIM} = 0 \Rightarrow v_{LIM} = g/\beta = mg/k}$$

$\boxed{\text{NB } v_{LIM} \to \infty \text{ se } k \to 0 \text{ (in assenza di attrito)}}$

- ➔ Soluzione dell'equazione di moto per separazione di variabili

$$\frac{dv}{dt} = g - \beta v \rightarrow \boxed{\frac{dv}{g-\beta v} = dt}$$

integrazione sull'intervallo $v = [v_0, v]$, $t = [0, t]$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{g - \beta v'} = t$$

Cambio di variabile $z = g - \beta v' \Rightarrow -\frac{1}{\beta} dz = dv' \Rightarrow \int_{g-\beta v_0}^{g-\beta v} -\frac{dz/\beta}{z} = -\frac{1}{\beta}\int_{g-\beta v_0}^{g-\beta v} \frac{dz}{z} = t$

cambio estremi di integrazione

logaritmo naturale

Diventa $\ln \frac{g-\beta v}{g - \beta v_0} = -\beta t \rightarrow \frac{v - g/\beta}{v_0 - g/\beta} = \frac{v - v_{LIM}}{v_0 - v_{LIM}} = e^{-\beta t}$

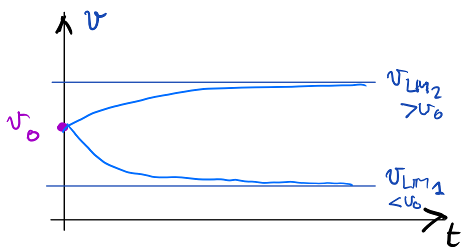
quindi $\boxed{v = v_{LIM} + (v_0 - v_{LIM}) e^{-\beta t}}$

NB condizioni «al contorno» corrette:

$v(t=0) = v_0$

$v(t\to\infty) = v_{LIM}$

Andamento continuo della velocità del punto: si devono distinguere i due casi $v_0 > v_{LIM}$ e $v_0 < v_{LIM}$. Per esempio: oggetto "veloce" che entra in un mezzo molto viscoso ($v_0 > v_{LIM}$) oppure oggetto "lento" (o fermo all'inizio) che entra in un mezzo poco viscoso ($v_0 < v_{LIM}$)

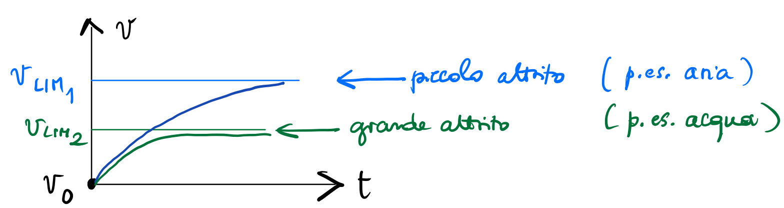


La velocità tende asintoticamente alla velocità limite a partire da v_0.

La rapidità di avvicinamento di $v(t)$ a v_{LIM} è regolata dal coefficiente $\beta = k/m$:

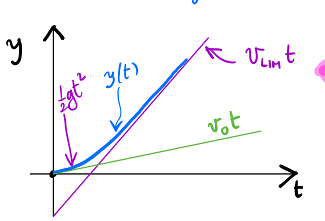
se c'è piccolo attrito → β è piccolo → avvicinamento lento → v_{LIM} grande

se c'è grande attrito → β è grande → avvicinamento brusco → v_{LIM} piccola



Si può ottenere la legge oraria della quota (posizione) del punto dalla $y = y_0 + \int_0^t v\,dt$

$$y = \int_0^t v\,dt = \int_0^t [v_{LIM} + (v_0 - v_{LIM})e^{-\beta t}]\,dt = \boxed{v_{LIM} t + \frac{1}{\beta}(v_0 - v_{LIM})(1 - e^{-\beta t})}$$



si vede la partenza «lineare» in t (per piccoli intervalli di tempo) con velocità v_0 e l'andamento per lunghi tempi ancora lineare con velocità "quasi costante" v_{LIM}

il grafico della accelerazione è un esponenziale che tende a zero.